Théorie Mathématique Platoniste-Théorie Aléatoire des nombres.

Par Thierry DELORT

Octobre 2011

Internet archive

I.PRESENTATION DES ARTICLES

II.THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE.

III.THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES.
(Conjecture de Goldbach)

I.PRESENTATION DES ARTICLES.

Le premier article, expose une Théorie Platoniste des fondations des mathématiques et de logique. Le $2^{\text{ième}}$ article est à la fois une théorie de logique étudiant le hasard dans les nombres, et aussi une branche de la Théorie des nombres permettant notamment de donner une justification théorique aux Conjectures faibles et étendues de Goldbach. Chaque article est composé de 2 sous-article.
Ces théories sont longuement commentées et présentées dans leur contexte dans le livre titre: Théories dôor $2^{\text{ième}}$ édition, auteur:Thierry Delort, Editions Books on Demand, Paris.

II.THEORIE MATHEMATIQUE PLATONISTE.

Auteur :Thierry DELORT.
Date : 30 Octobre 2011.

1^{ier} article : **INTRODUCTION A LA LOGIQUE PLATONICIENNE-THEORIE DES ENSEMBLES.**

2^{ième} article :**LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS**.

TABLE DES MATIERES :

Article :INTRODUCTION A LA LOGIQUE PLATONICIENNE-THEORIE DES ENSEMBLES
Auteur :Thierry DELORT
Date :30 Octobre 2011

Résumé :
Dans cet article, nous présentons une introduction à la Théorie Logique Platonicienne (TLP), côest-à-dire une théorie mathématique basée sur le Platonisme. En particulier nous présentons une Théorie des ensembles Platoniste, ce qui nous conduit à obtenir lôexistence au sens Platonicien des concepts de bases en mathématiques. La TLP est fondamentale car elle permet de donner une signification Platoniste aux mathématiques, c'est-à-dire basée sur lôexistence de concepts mathématiques dans un Espace mathématique Platonique, qui nôexiste pas dans les théories mathématiques de logique actuelles basées sur le formalisme.

Nous voyons aussi comment apparaissent naturellement dans toute théorie des ensembles Platoniste les paradoxes classiques (de Cantor ou de Russel) et nous exposons comment la TLP évite ces paradoxes.

A partir des bases de la théorie présentée dans cet article, il est possible de la développer pour obtenir une théorie mathématique de logique Platonicienne de lôensemble des mathématiques, ce qui sera fait dans un second article.

Mots clés :Platonisme -théorie des ensembles- Paradoxes de Cantor et de Russel- fondations des mathématiques.

1.INTRODUCTION

La plupart des mathématiciens ont lôidée dôune existence réelle des mathématiques, mais jusquôà présent cette conception, le Platonisme, était purement philosophique, les théories mathématiques de logique actuelle étant basées sur le formalisme. Le présent article présente une théorie mathématique, et non philosophique, donnant une conception Platoniste des mathématiques. C'est-à-dire quôelle donne une signification réelle, c'est-à-dire dans un Espace mathématique Platonique, aux concepts mathématiques classiques.

Nous verrons donc comment cette Théorie mathématique de Logique Platonicienne (TLP) permet de montrer lôexistence au sens Platonique des concepts basiques classiques mathématiques.(Ensemble des naturels, des réels, espaces vectorielsé).

Nous verrons que dans une théorie Platoniste apparaissent naturellement certains paradoxes analogues aux paradoxes classiques (de Cantor et de Russel) et comment ils sont évités par la TLP.

Nous verrons quôil y a une profonde analogie entre la TLP et la théorie géométrique dôEuclide, notamment lôexistence dôun espace dans lequel existe des objets mathématiques, mais contrairement à la théorie dôEuclide, la TLP peut interpréter lôensemble des mathématiques modernes.

2.AXIOMES DE LA TLP

Le premier Axiome de la TLP est aussi le plus important. Il utilise comme concept primitif le concept dôEspace Mathématique Platonique (EMP). Par « concept primitif », on entend de façon usuelle « concept dont le sens est compris intuitivement , et dont on nôutilise que les propriétés intuitivement évidentes». On rappelle que toute théorie mathématique utilise des concepts primitifs, et le concept primitif dôEspace Mathématique Platonique apparaît fondamental dans la TLP.
Lô Axiome de base de la TLP est donc :

AXIOME 2.1 :
a)Il existe un unique Espace mathématique Platonique.
b)Les objets mathématiques existent dans cet Espace Mathématique Platonique.

On voit que cet Axiome utilise aussi comme concept primitif le concept dô « objet mathématique ».

LôEspace Mathématique Platonique (EMP) est analogue à un Espace Euclidien, plan Euclidien ou Espace Euclidien de dimension 3. Côest pourquoi on utilise le terme dô « Espace » pour le désigner. Les objets mathématiques existent à lôintérieur de lui de façon analogue à la manière dont les figures géométriques (cercle, droite ,sphèreé) existent à lôintérieur du plan ou de lôEspace Euclidien.
Cependant, lô analogie nôest pas complète car on verra que lôEMP ne peut pas être considéré comme un ensemble contrairement à lôEspace Euclidien dans sa conception mathématique actuelle . Côest pourquoi on dira quôun objet mathématique *existe dans lôEMP* ou (simplement *existe* sôil est implicite quôil existe dans lôEMP), et non quôil *est un élément* de lôEMP.
On définit alors les concepts fondamentaux de la TLP :

DEFINITION 2.2A) :
Un *ensemble* A est un objet existant dans lôEMP défini par les objets quôil contient appelés *éléments* de A qui sont des objets existants.

On admet lôexistence des objets suivants :
AXIOME 2.2B) :

a) Il existe un ensemble nôayant aucun élément, unique, appelé « *ensemble vide* » et représenté par ů.
b)Si a et b sont deux objets existants, alors le couple (a,b), constitué dôun premier terme a et dôun $2^{ième}$ terme b, est un unique objet existant dans lôEMP .

Comme conséquence de la Définition 2.2A, on a aussi lôAxiome :

AXIOME 2.2C) :
Si A et B sont 2 ensembles ayant les mêmes éléments, alors ils sont identiques.

Cet Axiome est la conséquence immédiate du fait quôun ensemble est défini par les éléments quôil contient dôaprès la Définition 2.2A.

On emploiera aussi dans la TLP un concept primitif fondamental, qui est de *considérer* des *objets mathématiques correspondant à une définition.* On a alors les définitions fondamentales suivantes :

DEFINITION 2.3 :
On dira quôon *considère les objets mathématiques correspondant à une définition D(o)* si :
a)Tout objet mathématique O existant dans lôEMP *correspondant à la définition* D(o), c'est-à-dire par définition pour lequel on a « D(O) est vraie », est parmi les objets *considérés*.
b)Tout objet mathématique O existant dans lôEMP *ne correspondant pas à la définition* D(o), c'est-à-dire par définition pour lequel on a Non(« D(o) est vraie ») est parmi les objets *non-considérés*.
c)On dira que la définition D(o) est *binaire* si pour tout objet mathématique existant O, on a ou bien « D(O) est vraie » ou bien Non(« D(O) est vraie »).
d) On dira que la définition D(o) *est cohérente* si pour aucun objet existant O on a « D(O) est vraie » et Non(« D(O) est vraie »).
e)Si on a une définition D(o), et si O est défini comme étant un symbole pouvant représenter certains objets mathématiques tel quôon ait :
(i)« O_0 est un objet mathématique correspondant à D(o) » est équivalent à « O peut représenter O_0 ».
(ii)« O_0 est un objet mathématique ne correspondant pas à D(o) » est équivalent à « O ne peut pas représenter O_0 ».
(Lôéquivalence signifiant que les propositions sôentraînent mutuellement.)
(iii)Il existe au moins un objet mathématique pouvant être représenté par O.
On dira alors que O est un *concept associé* à D(o). On identifiera classiquement le symbole O avec un objet quôil peut représenter.
(Si on a seulement (i) et (ii), on dira que O est un *symbole associé* à D(o).
On distinguera alors 2 sortes de concepts :
-Si O peut représenter tout objet correspondant à D(o), mais représente le même objet partout où il est utilisé, on dira que O est un *concept particulier* associé à D(o).

-Si les objets pouvant être représentés par O ou ne pouvant pas être représentés par O sont les mêmes quelque soient les objets représentés par les concepts particuliers définis avant O, on dira que O est un *concept général* associé à D(o).
On définit de façon analogues des *symboles particuliers* ou *généraux* associés à des définitions, mais on nôutilisera seulement des symboles particuliers.
f)On dira quôun objet a_0 *appartient à* un concept général O si a_0 peut être représenté par le concept général O. On dira quôun concept O_1 (général ou particulier) *est inclus* dans un concept O_2 si tout objet pouvant être représenté par O_1 peut être représenté par O_2.

On remarque que les concepts « un objet mathématique » et « lôEMP » sont partiellement définis par lôAxiome 2.1. On peut aussi considérer quôun objet mathématique est le concept général associé à la définition D(o) : « o existe dans lôEMP », et que lôEMP est un concept général primitif partiellement défini par lôAxiome 2.1. De même, « un ensemble » est le concept général associé à la Définition 2.2A. Lôun des concepts particuliers les plus courants sera de la forme « x est un concept particulier associé à la définition D(o) : « o est élément de A », A étant un concept particulier qui peut représenter seulement des ensembles.

On nôutilise pas de la même façon des concepts généraux et particuliers. Par exemple la définition D(o) :« o est identique à un ensemble » a exactement la même signification que « D_E(o) », $D_E(o_E)$ étant la définition associée au concept général « un ensemble », et a exactement la même signification que « Il existe A concept particulier associé à $D_E(o_E)$, tel que o est identique à A ». o_G étant un concept général quelconque , la définition « o est identique à o_G » a une des définitions équivalentes analogues. Donc si E est le concept particulier associé à « o est un ensemble », E peut représenter nôimporte quel ensemble quel que soit les objets représentés par les concepts particuliers définis avant E.
Au contraire si B est un concept particulier pouvant représenter seulement des ensembles, si on définit après la définition de B le concept particulier E associé à « o est identique à B », alors B représentant un objet B_0, E peut représenter seulement lôobjet B_0.

DEFINITION 2.4 :
a)D(o) étant une définition, on dira quôon considère des objets mathématiques correspondant à une définition D(o) *qui existent* si D(o) est binaire et cohérente.
b)On dira quôune définition D(o) est *non-floue* si D(o) est binaire et cohérente et que D(o) est *floue* sinon.
c)Si O est un concept (général ou particulier) associé à une définition D(o), on dira que O est un concept *non-flou* si D(o) est non-floue. (Et que O est *flou* si D(o) est floue).

On dira donc quôil *existe un concept (particulier) non-flou* associé à une définition D(o) si D(o) est non-floue et quôil existe au moins un objet correspondant à D(o). Si O est un concept non-flou, il peut représenter au moins un objet et dôaprès la Définition 2.3, pour tout objet existant O_0, ou bien « O_0 peut être représenté par O », ou bien « O_0 ne peut pas être représenté par O », et on ne peut avoir « O_0 peut être représenté par O » et « O_0 ne peut pas être représenté par O ». Ceci peut être considéré comme la définition dôun *concept non-flou*. Alors avec cette définition, on a bien dôaprès la Définition 2.3e que si O est un concept associé à une définition D(o) non-floue, alors il est non-flou.

Nous recherchons maintenant un Axiome permettant dôobtenir quôune définition D(o) est non-floue. Tout dôabord on remarque que les concepts mathématiques fondamentaux introduits dans la TLP (« un objet mathématique » qui peut représenter tout objet mathématique, lôEMP qui représente un unique objet, « un ensemble ») apparaissent intuitivement comme des concepts non-flous. LôAxiome le plus simple permettant dôobtenir quôune définition D(o) est non-floue serait celui qui admet que si une définition D(o) pour définir o utilise seulement des concepts non-flous, généraux ou particuliers, et des concepts primitifs classiques (« est identique à », « pour tout », « Il existe (un et un seul », « couple », « premier-ou $2^{\text{ième}}$ -terme »(dôun couple), « est élément de »..) alors D(o) est non-floue. Côest cet Axiome que nous admettrons :

AXIOME 2.5 :
a)Les concepts « un ensemble » (associé à la définition 2.2A)), « EMP », « objet mathématique », « ensemble vide » (Introduit dans lôAxiome 2.2B)) sont des concepts généraux non-flous appelés *concepts primitifs* .
b)Si une définition D(o) utilise pour définir o seulement o ,des concepts non-flous (généraux ou particuliers) et des concepts primitifs classiques ayant leur signification usuelle parmi :« est identique à », « pour tout », « Il existe (un et un seul)é (tel que) », « couple », « premier-ou $2^{\text{ième}}$- terme » (dôun couple), « Non », « et », «ou », alors D(o) est une définition non-floue. On dira que les concepts primitifs précédents sont des

concepts primitifs relationnels non-flous. On supposera de plus quôon utilise toujours un nouveau symbole pour définir un nouveau concept (ou un nouveau symbole) associé à une définition.

On admettra donc axiomatiquement dans cet article les points a) et b) de lôAxiome 2.5. Une justification théorique complète du point b) de cet Axiome fondamental de la TLP sera donnée dans un développement ultérieur de la TLP, dans un second article.

REMARQUE 2.5A) :
a)Dans une définition non-floue, on peut donc utiliser des symboles représentant des concepts non-flous (Par exemple comme on le verra **N**, **Q**é).
b)On peut aussi dans une définition non-floue utiliser les symboles usuels « (,) » pour représenter le concept primitif « couple » qui est non-flou dôaprès lôAxiome 2.5.
c)On peut aussi utiliser dans une définition D(o) non-floue des symboles c(o), associés à des définitions $D(o_c)$ utilisant o et des concepts non-flous pour définir o_c. Ainsi par exemple si a est un concept non-flou, on peut utiliser « (o,a) », symbole associé à $D(o_c)$: « o_c est identique à (o,a) » dans une définition non-floue D(o).
d)Si dans une définition D(o), on a , P et Q étant 2 propositions on a lôexpression « (Qou(Non(P))et(Pou(Non(Q)) », P et Q nôutilisant que o et des concepts non-flous, cette expression pourra être utilisée dans une définition non-floue dôaprès lôAxiome 2.5b). On écrira classiquement « P est *équivalent à* Q » pour la représenter, et donc on identifiera « *est équivalent* », sôil est employé dans une définition dôun objet mathématique D(o), à un concept relationnel non-flou. (C'est-à-dire un concept relationnel pouvant être utilisé dans une définition non-floue. De même on identifiera « *si..alors* » à un concept relationnel non-flou.
e)Il peut exister différents concepts particuliers associés à la même définition. Pour cela il suffit dôutiliser des symboles différents. Par exemple si O_1 et O_2 sont associés à la même définition D(o), O_1 et O_2 peuvent représenter chacun dôeux un objet correspondant à D(o), mais ne représentent pas nécessairement le même simultanément.
f)En général on utilisera le concept primitif « il existe » dans une expression du type « Il existe O_1 concept particulier associé à $D_1(o)$ tel que $D^*(o,O_1)$ ($D^*(o,O_1)$ étant une définition) ». Alors pour quôun objet a_0 corresponde à la définition précédente, dôaprès la signification du concept primitif « Il existe », il faut et il suffit quôil existe un objet O_{10} pouvant être représenté par O_1 tel quôon ait « $D^*(a_0,O_{10})$ est vraie ».
g)Si $D_1(o)$ et $D_2(o)$ sont des définitions (*exactement) équivalentes syntaxiquement*, c'est-à-dire ayant exactement la même signification dôaprès la signification des mots quôelles utilisent, et si $D_1(o)$ est non-floue, on considèrera évidemment que $D_2(o)$ est non-floue.
h)On mettra toujours explicitement « o_G est le concept général associé à la définition D(o) » pour définir un concept général. Sinon, on supposera implicitement dans une définition « O est le concept associé à D(o) » que O est un concept particulier. De même, si on définit A comme un concept non-flou associé à une définition, on supposera implicitement que A est un *concept particulier* associé à une définition non-floue. Sinon on définira explicitement A comme étant un concept général non-flou.
Dans cet article, on utilisera seulement comme concepts généraux les concepts généraux propres à la TLP (EMP, objet mathématique) , et les concepts généraux classiques « ensembles », « ensemble vide », **N**,**Q**.. (dont on montrera lôexistence).
On remarque aussi que comme on lôa vu dans la définition D(o) : « o est un ensemble », si on a un concept général o_{1G} associé à une définition $D_1(o)$, on peut toujours obtenir une définition utilisant un concept particulier O_1 associé à $D_1(o_1)$ à la place de o_{1G}.
i)On verra que certains concepts généraux sont aussi des concepts particuliers, car ils représentent un unique objet partout où on les utilise (lôensemble vide, lôEMP, **N**,**Q**,**R**..)
j)Si un concept associé à une définition nôest pas à la fois général et particulier, il sera toujours nécessaire de spécifier sôil est un concept général ou particulier, sinon la signification dôune définition lôemployant nôest pas définie.

REMARQUE 2.5B) :
a)Un cas particulier est le cas où D(o) emploie un symbole nôayant aucun sens par exemple « XYZ ». Il est clair quôon ne peut pas utiliser lôAxiome précédent pour obtenir que D(o) est non-floue. Si par exemple D(o) emploie lôexpression « a est élément de o », alors si o nôest pas un ensemble il est impossible que o corresponde à la définition D(o) car si on a « a élément de o », a étant nôimporte quel objet mathématique, cela entraîne que o est un ensemble. Même si D(o) emploie seulement les concepts définis à lôAxime 2.5,

elle peut nôavoir aucun sens, par exemple « o élément élément ». Alors, tout en étant non-floue, aucun objet existant ne correspond à D(o) et donc il nôexiste pas de concept associé à D(o).
b)On remarque que dôaprès lôAxiome 2.5, les définitions $D_C(o)$: « o est un ensemble » (qui est exactement équivalente syntaxiquement à $D_E(o)$, si $D_E(o)$ est la définition dôun ensemble donnée en 2.2A , ou à « o appartient au concept « un ensemble » » ou à « Il existe A concept associé à la définition dôun ensemble $D_E(o_E)$ tel que o est identique à A ») et $D_R(o)$: « o est un ensemble et Non(o est élément de o) » sont des définitions non-floues.
c)On nôutilisera jamais directement la définition 2.2A dôun ensemble pour exprimer ses propriétés, mais seulement le fait quôil soit un concept non-flou et des Axiomes de formulation très simple comme lôAxiome 2.2C.

Supposons quôon considère des objets mathématiques correspondant à une définition D(o). On cherche à savoir sôil existe un ensemble A, concept non-flou dont les éléments correspondent à la définition D(o). On a la définition suivante dôun tel ensemble :

DEFINITION 2.6 :

D(o) étant une définition, A est un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à D(o) si on a :
A est un concept particulier non-flou qui peut seulement représenter un ensemble, et pour tout objet existant O :
(i) «O correspond à D(o) (C'est-à-dire « D(O) vraie) » est équivalent à « O est élément de A »
(ii) « O ne correspond pas à O (Côest-à-dire Non(« D(O) est vraie ») est équivalent à « O nôest pas élément de A.

REMARQUE 2.7 :

Dans la définition précédente, le concept primitif « est équivalent » signifie que si $D_1(O)$ est équivalente à $D_2(O)$, alors $D_1(O)$ entraîne $D_2(O)$ et $D_2(O)$ entraîne $D_2(O)$. (Il nôa donc pas le sens du concept primitif « est équivalent » donné dans la Remarque 2.5A., mais celui utilisé dans la Définition 2.3e). Il semble que dôaprès la signification du concept primitif « Non », on ait toujours (i) qui entraîne (ii).

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition D(o) non-floue, c'est-à-dire binaire et cohérente, on pourrait sôattendre à ce quôil existe un ensemble dont les éléments correspondent à D(o). Ceci équivaudrait à admettre lôAxiome suivant, que nous appellerons « Axiome Naïf » :

AXIOME NAIF 2.8:

Si on considère des objets mathématiques correspondant à une définition D(o) non-floue, alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à la définition D(o).

Or cet Axiome est faux. On lôa appelé « Axiome Naïf » car il conduit aux mêmes paradoxes que la Théorie naïve des ensembles.

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Cantor à partir de lôAxiome naïf 2.8 :

Supposons quôon considère les objets mathématiques correspondants à la définition $D_C(o)$ « o est un ensemble ». On a vu que dôaprès lôAxiome 2.5, $D_C(o)$ est non-floue côest à dire $D_C(o)$ est binaire et cohérente. Cependant si lôAxiome naïf 2.8 est vrai, alors il existe un ensemble non-flou A_C dont les éléments correspondent à $D_C(o)$, alors admettant que tout sous-ensemble de A_C est un ensemble existant (Ce qui est obligatoire si le concept « ensemble » a les propriétés des ensembles classiques), A_C admet comme élément chacun de ses sous-ensembles, et ceci est impossible car on est dans un cas analogue au Paradoxe de Cantor. On obtient aussi le paradoxe de Cantor dans la TLP, car dans cette théorie, et comme on le voit dans la Définition 2.2A) dôun ensemble, les ensembles ont les mêmes propriétés que les ensembles dans la théorie classique. Montrons cependant comment on lôobtient.

On suppose donc lôexistence du concept particulier non-flou A_C. On remarque que dôaprès lôAxiome 2.2C, A_C représente un unique ensemble.

On considère alors la définition dôun sous-ensemble de A $D_{sAC}(o)$: : « o est un ensemble et tout élément de o est élément de A_C », qui est équivalente à « o est un ensemble et pour tout c(o) symbole associé à $D(o_c)$« o_c est élément de o », c(o) est élément de o ». Ce qui précède justifie quôon peut considérer « est inclus », défini classiquement, comme un concept relationnel non-flou). Dôaprès lôAxiome 2.5, $D_{s(AC)}$ (o) est non-floue, et donc si lôAxiome naïf est vrai, il existe un ensemble non-flou $P(A_C)$ (représentant un unique

ensemble) dont les éléments correspondent à $D_{s(AC)}$ (o). On a de plus $P(A_C)$ est inclus dans A_C puisque les éléments de $P(A_C)$ sont des ensembles.

Pour tout s_0 appartenant à $P(A_C)$, on définit $f(s_0)$ par $f(s_0)=s_0$. Donc $f(s_0)$ existe nécessairement. On dira classiquement qu'on a défini une fonction f, la fonction « identité ».

On considère alors l'ensemble $S=\{s_0/ s_0$ est élément de $P(A_C)$ et s_0 n'est pas élément de $s_0\}$. S est un ensemble non-flou représentant un unique ensemble si l'Axiome naïf est vrai.

De plus il est évident que S est inclus dans A, et donc S est un élément de $P(A)$.

On a f(S)=S. Si S n'est pas élément de S, S est élément de S, ce qui est impossible puisque S est un concept non-flou donc « o est élément de S » est cohérente. De même il es impossible que S n'est pas élément de S.

On a donc une contradiction avec l'existence de f(S), et donc on est dans un cas analogue au Paradoxe de Cantor, car un objet ne peut à la fois exister et ne pas exister.

(On sait plus généralement qu'il ne peut exister une injection f de $P(A)$ dans un ensemble A, considérant l'ensemble S={s/ s est élément de A , s a un antécédent par f et s n'est pas élément de $f^{-1}(s)$}, on obtient que S ne peut avoir d'image par f.)

On remarque qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser l'Axiome naïf pour obtenir l'existence de S et de $P(A_C)$, en supposant l'existence de A_C. Il suffit d'utiliser la théorie des ensembles classiques, et on verra que dans la TLP, ils existent aussi si A_C existe. On obtient donc un paradoxe analogue au Paradoxe de Cantor en utilisant l'Axiome naïf seulement pour obtenir l'existence de A_C.

Montrons comment on obtient un paradoxe analogue au Paradoxe de Russel :

Considérons les objets correspondants à la Définition $D_R(o)$« o est un ensemble et Non(« o est un élément de o ») ». On a vu que $D_R(o)$ était non-floue d'après l'Axiome 2.5 c'est à dire $D_R(o)$ est binaire et cohérente. Supposons que l'Axiome naïf 2.8 soit vrai. Alors il existe un ensemble A_R non-flou dont les éléments correspondent à $D_R(o)$.

A_R ne peut représenter qu'un unique ensemble d'après l'Axiome 2.2C.

Si « A_R est élément de A_R » est vraie, alors A_R ne correspond pas à $D_R(o)$, et donc A_R n'est pas élément de A_R, il est donc impossible qu'on ait « A_R est élément de A_R » est vraie puisque d'après l'Axiome 2.5 la relation « o est élément de A_R » est cohérente.

Si on a Non(« A_R est élément de A_R » est vraie), alors A_R correspond à $D_R(o)$ et donc « A_R est élément de A_R », ce qui est impossible puisque la définition « o est élément de A_R » est cohérente. Il est donc impossible qu'on ait Non(« A_R est élément de A_R » est vraie)

Or ceci est impossible puisque la définition D(o) :«o est élément de A_R » est binaire d'après l'Axiome 2.5 puisque A_R est un concept non-flou, et donc on a ou bien « A_R est élément de A_R » est vraie, ou bien Non(« A_R est élément de A_R » est vraie).

On recherche donc un Axiome de la TLP permettant d'obtenir l'existence d'un ensemble non-flou A dont les éléments correspondent à une définition D(o). On remarque que d'après l'Axiome 2.2C, A ne peut représenter qu'un unique ensemble.

Il est clair qu'une condition nécessaire est que D(o) soit binaire et cohérente.

En effet, si D(o) n'est pas binaire, alors pour un objet O existant, on a ni « D(O) est vrai » ni Non(« D(O) est vraie »).Il en résulte, d'après la Définition 2.6, qu'on ne peut pas avoir « O est élément de A » (Sinon on a « D(O) est vraie »), ni Non(« O est élément de A ») (Sinon on a Non(« D(O) est vraie »). Or ceci est impossible puisque la définition $D_A(o)$:« o est élément de A » est non-floue d'après l'Axiome 2.5 puisqu'on a supposé A concept non-flou.

Si D(o) n'est pas cohérente, il existe un objet O tel qu'on ait « D(O) est vraie » et Non(« D(O) est vraie ») . D'après la Définition 2.6 et la Remarque 2.7, ceci entraîne « O est élément de A » et Non(« O est élément de A »). Or ceci est impossible puisque la Définition $D_A(o)$: « o est élément de A » est cohérente d'après l'Axiome 2.5.

Ainsi pour que A ensemble non-flou existe, il est nécessaire que D(o) soit non-floue.

Si o est un objet mathématique correspondant à une définition D(o), il est clair que la définition « o est un objet mathématique tel que D(o) » est plus complète que la définition « D(o) ». Cette notion permettra de comprendre intuitivement l'origine des paradoxes comme ceux de Cantor et de Russel. On introduit donc la notion de *forme complète* d'une définition :

DEFINITION 2.9 :

D(o) étant une définition, on appelle *forme complète* de D(o) la définition : « o est un objet mathématique tel que D(o) ».

Supposons que D(o) soit non-floue, et que tout objet correspondant à D(o) soit élément dôun ensemble non-flou E. Puisque D(o) est binaire et cohérente, il semble intuitivement certain quôil existe un sous-ensemble de E dont les éléments correspondent à D(o), ce quôon admettra axiomatiquement. On introduit donc la définition suivante :

DEFINITION 2.10 :

Si on a une définition D(o) telle que tout objet O_0 correspondant à D(o) soit élément dôun ensemble (Qui doit être le même pour tout objet O_0 correspondant à D(o)), alors on dira que D(o) est *basique*.

Il sera aussi utile dôintroduire dans la TLP les notions suivantes :

DEFINITION 2.11 :

a)Si on a une définition $D(o,O_1,..,O_n)$ définissant o en utilisant les concepts particuliers $O_1,..,O_n$, on dira par définition quôon considère la définition $D(o,O_1,.,O_n)$ de *paramètres fixes* $O_1,..,O_n$ si :

-Pour $O_1,..,O_n$ représentant simultanément les objets $O_{10},..,O_{n0}$ (ou de façon équivalente pour $(O_1,..,O_n)$ représentant la séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ dont on montrera plus loin lôexistence), on considère la définition $D(o,O_{10},..,O_{n0})$. Donc la définition $D(o,O_{10},é\ ,O_{n0})$ nôest définie que si $O_1,..,O_n$ représentent simultanément $O_{10},é\ ,O_{n0}$, et le concept $O(O_{10},..,O_{n0})$ associé à la définition $D(o,O_{10},..,O_{n0})$ ne peut exister que si $O_1,..,O_n$ peuvent représenter simultanément $O_{10},..,O_{n0}$.

b)Sôil existe au moins une séquence $(O_{10},é\ ,O_{n0})$ représentée par $(O_1,..,O_n)$ et si pour chaque séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ représentée par $(O_1,..,O_n)$ il existe au moins un objet correspondant à la définition $D(o,O_{10},é\ ,O_{n0})$, on dira que le *concept particulier* $O(O_1,..,O_n)$, *associé à la définition* $D(o,O_1,..,O_n)$ de *paramètres fixes* $O_1,..,O_n$ *existe et est défini en fonction* de $O_1,..,O_n$. Dans ce cas, $(O_1,..,O_n)$ représentant $(O_{10},..,O_{n0})$, le concept particulier $O(O_1,..,O_n)$ est identifié au concept particulier $O(O_{10},..,O_{n0})$. Il dépend donc de la séquence $(O_{10},é\ ,O_{n0})$ représentée par $(O_1,..,O_n)$. Si en outre $O(O_{10},..,O_{n0})$ ne représente quôun objet pour chaque séquence $(O_{10},..,O_{n0})$, on dira que $O(O_1,..,O_n)$ est *défini uniquement en fonction* de $O_1,..,O_n$ (ou de $(O_1,..,O_n)$) pour la définition considérée.

c)$O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers, on dira quô$O_1,..,O_n$ sont *fixés*, (ou que $(O_1,..,O_n)$ est *fixé*), si on considère quôil représentent des objets $O_{10},..,O_{n0}$ parmi ceux quôils peuvent représenter simultanément.

On dira que le *concept (particulier)* $(O_1,..,O_n)$ *existe* sôil existe des objet $O_{10},é\ ,O_{n0}$ qui peuvent être représenter simultanément par les concepts $O_1,..,O_n$).

On verra plus loin et on admettra que si $O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers non-flous, alors le concept $(O_1,.,O_n)$ existe toujours.

REMARQUE 2.12 :

a)-Si on a une définition non-floue $D(o,O_1,é\ .,O_n)$ de paramètres fixes $O_1,..,O_n$ alors le concept particulier $O(O_1,..,O_n)$ défini précédemment est le concept particulier associé à $D(o,O_1,..,O_n)$ et est donc non-flou. Il pourra donc être utilisé dans une définition non-floue dôaprès lôAxiome 2.5.

-Si $D(o,O_1,..,O_n)$ est une définition non-floue, dôaprès la définition dôune définition non-floue, pour tout $O_{10},..,O_{n0}$ représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, pour tout objet existant O, on a ou bien « $D(O,O_{10},é\ ,O_{n0})$ est vraie » ou bien Non (« $D(O,O_{10},..,O_{n0})$ est vraie ») et on ne peut avoir « $D(O,O_{10},..,O_{n0})$ est vraie » et Non(«$D(O,O_{10},..,O_{n0})$ est vraie »).

Si par exemple on a 3 concepts $O_1(O_2,O_3)$, O_2,O_3, O_1 étant défini en fonction de O_2 et O_3, alors si (O_1,O_2,O_3) est fixé, $(O_1(O_2,O_3),O_2,O_3)$ ne peut représenter que des objets de la forme $(O_{10}(O_{20},O_{30}),O_{20},O_{30})$, où (O_2,O_3) est fixé et représente (O_{20},O_{30}) et $O_{10}(O_{20},O_{30})$ est un objet qui peut être représenté par le concept $O_1(O_{20},O_{30})$.

b)Il est parfois utile de définir un concept particulier associé à une définition $D(o,O_1,..,O_n)$ non seulement avec $O_1,..,O_n$ fixés mais aussi avec $C_1,..,C_k$ dôautres concepts particuliers que $O_1,..,O_n$ fixés. Pour cela, on doit utiliser un nouveau symbole pour définir $O(O_1,..,O_n)$ (Ce qui sera toujours le cas si on définit un nouveau

concept) et de plus de le définir après la définition de $O_1,..,O_n,C_1,..,C_k$ par la définition $D(o,O_1,..,O_n)$ pour O_1,é ,C_k fixés.
Alors O_1,é ,$O_n,C_1,..,C_k$ représentant simultanément $O_{10},..,C_{k0}$, $O(O_1,..,O_n)$ représente $O(O_{10},..,O_{n0})$ quelque soit C_{10},é ,C_{k0}.

c)Si on a une définition $D(o,O_1,..,O_n)$ de paramètres fixes $O_1,..,O_n$, avec O_i défini en fonction de $O_{i1},..,O_{ik(i)}$, alors O_i nôest défini que pour $O_{i1},..,O_{ik(i)}$ fixés (par exemple à $O_{1i0},..,O_{ik(i)0}$), et alors $O_i(O_{i1},..,O_{ik(i)})$ peut représenter les objets représentés par le concept $O_i(O_{i10},..,O_{ik(i)0})$. Donc si O_i est fixé on considèrera aussi que $O_{i1},..,O_{ik(i)}$ sont fixés.

d)Si on dit que le concept particulier $O(O_1,..,O_n)$ est défini uniquement en fonction de $O_1,..,O_n$, il est important de préciser pour quelle définition.

e)Dôaprès la Définition 2.10, une définition $D(o,O_1,..,O_n)$ de paramètres fixes $O_1,..,O_n$ est basique si pour tous objets $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés simultanément par $O_1,..,O_n$, tout objet O correspondant à $D(o,O_{10},..,O_{n0})$ appartient à un ensemble existant, qui doit être le même pour tout O, avec $O_1,.,O_n$ fixés à $O_{10},..,O_{n0}$, mais peut dépendre de $O_{10},..,O_{n0}$.

f)Soit $O_A(O_1,.,O_n)$ un concept particulier non-flou associé à une définition $D(o,O_1, .,O_n)$, $O_1,.,O_n$ étant des concepts particulier non-flous. Soit alors $O'_1,..,O'_n$ n concepts particuliers non-flous tels que $(O'_1,..,O'_n)$ soit inclus dans $(O_1,..,O_n)$, c'est-à-dire que si $(O'_{10},..,O'_{n0})$ peut être représenté par $(O'_1,..,O'_n)$ alors il peut aussi être représenté par $(O_1,..,O_n)$.
Il est évident alors que la définition $D(o,O'_1,..,O'_n)$ est non-floue (car on remplace des concepts non-flous par des concepts non-flous), et quôil existe un concept non-flou $O_B(O'_1,..,O'_n)$ associé à cette définition.
De plus si $(O'_{10},..,O'_{n0})$ peut être représenté par $(O'_1,..,O'_n)$, il est évident que le concept $O_A(O'_{10},..,O'_{n0})$ peut représenter les mêmes objets que $O_B(O'_{10},..,O'_{n0})$.
On pourra donc écrire $O_B(O'_1,..,O'_n)$ sous la forme $O_A(O'_1,..,O'_n)$, qui est donc alors un concept particulier non-flou.

g)Si on a une définition non-floue $D(o,O_1,..O_n)$ de paramètres fixes les concepts non-flous $O_1,..,O_n$, on peut utiliser dans $D(o,O_1,..,O_n)$ dôaprès lôAxiome 2.5 un concept non-flou $O_A(O_{A1}$,é ,$O_{Ak})$ associé à une définition non-floue $D_A(o_A,O_{A1},..,O_{Ak})$, avec par exemple $O_{A1},..,O_{As}$ sont parmi $O_1,..,O_n$. Alors pour $O_1,..,O_n$ fixés à $O_{10},..,O_{n0}$, on doit considérer $O_A(O_{A1},.,O_{Ak})$ pour $O_1,..,O_n$ fixés à $O_{10},..,O_{n0}$. Et donc $O_A(O_{A1}$,é ,$O_{Ak})$ représente le concept $O_A(O_{A10},..,OA_{s0},O_{As+1},..,O_{Ak})$, associé à $D(o_A,O_{A10},..,O_{As0},O_{As+1},.,O_{Ak})$.

h)Si $O_A(O_1,..,O_n)$ est un concept non-flou associé à la définition $D_A(o,O_1,..,O_n)$ de paramètres fixes les concepts non-flous $O_1,..,O_n$ et que pour tout i dans {1,..,n}, O_i est défini uniquement en fonction des concepts non-flous $O_{i1},..,O_{ik(i)}$, et donc quôon peut écrire O_i sous la forme $O_i(O_{i1}$,é ,$O_{ik(i)})$ alors il est évident que $O_A(O_1,..,O_n)$ peut être identifié avec le concept non-flou $O_B(O_{11}$,é ,O_{ij},é ,$O_{nk(n)})$ associé à la définition $D_B(o,O_{11},..,O_{ij},..,O_{nk(n)})$ de paramètres fixes $O_{11},..,O_{nk(n)}$ qui est la définition $D_A(o,O_1(O_{11},..,O_{1k(1)},..,O_n(O_{n1},..,O_{nk(n)}))$.

i)On remarque que $(O_1,..,O_n)$ pouvant représenter plusieurs séquences $(O_{10},..,O_{n0})$, on nôaura jamais un concept général associé à une définition $D(o,O_1,.,O_n)$ de paramètres fixes $O_1,..,O_n$, car alors les objets quôil représente dépendent des objets $O_{10},..,O_{n0}$ représentés par $O_1,..,O_n$ ce qui est contraire à la définition dôun concept général.

j)Une définition D(o) peut être associée à un concept général si, en définissant o, D(o) nôutilise aucun concept particulier défini avant D(o) qui nôest pas un concept général. Alors les objets correspondant à D(o) sont complètement indépendants des objets représentés par les concepts particuliers définis avant D(o). Si cela est le cas on dira que D(o) est une *définition générale*.
Si on exprime une définition D(o) sous la forme dôune définition $D(o,O_1$,é ,$O_n)$ de paramètres fixes $O_1,..,O_n$, on supposera toujours que pour définir o, $D(o,O_1,..,O_n)$ nôutilise aucun concept particulier défini avant D(o) excepté $O_1,..,O_n$. En effet si D(o) utilise un autre concept particulier O_{n+1} et que celui-ci nôest pas fixé, alors $D(o,O_1,..,O_n)$ nôa pas de sens sauf si O_{n+1} représente un unique objet. Et donc pour définir o les seuls concepts particuliers utilisés par $D(o,O_1,..,O_n)$ sont les concepts particuliers $O_1,..,O_n$, et des concepts particuliers définis à lôintérieur de $D(o,O_1,..,O_n)$ ou sont aussi des concepts généraux. Et donc si $O_1,..,O_n$ sont aussi des concepts généraux, alors $D(o,O_1,..,O_n)$ est une définition générale.

Si on exprime un concept particulier sous la forme $O(O_1$,é $,O_n)$, on supposera toujours implicitement quõil est associé à une définition de la forme $D(o,O_1,..,O_n)$.
Si A est un ensemble dont les éléments correspondent à une définition générale D(o), alors on pourra considérer que A est un concept général, car il représente un ensemble indépendant des objets représentés par les concepts particuliers définis avant lui.

k)Dans certains cas un concept général associé à une définition $D_G(o)$ peut représenter toutes les séquences pouvant être représentées par un concept particulier $(O_1,..,O_n)$, $O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers. Ceci est le cas si $O_1,.,O_n$ sont définis dans $D_G(o)$ à partir de concepts généraux et que dans $D_G(o)$ o est défini par « o est identique à $(O_1,..,O_n)$ ».
Plus généralement un concept général associé à une définition $D_G(o)$ peut représenter tous les objets représentés par un concept particulier $O(O_1,..,O_n)$, $O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers. (Et donc tous les objets pouvant être représentés par $O(O_{10}$,é $,O_{n0})$, avec $(O_{10},..,O_{n0})$ peut être représenté par $(O_1,..,O_n)$).
Ceci est le cas si $O_1,..,O_n$ sont des concepts particuliers définis dans $D_G(o)$ à partir de concepts généraux, et si dans $D_G(o)$ o est défini par une définition $D(o,O_1,..,O_n)$ de paramètres fixes $O_1,..,O_n$. Alors $O(O_1,..,O_n)$ est le concept associé à $D(o,O_1,..,O_n)$.
On remarque que si on remplace dans $D_G(o)$ $D(o,O_1,..,O_n)$ par « o est identique à $(O_1,..,O_n)$, on obtient une définition générale $D^*_G(o)$ telle que le concept général associé à $D^*_G(o)$ peut représenter toutes les séquences pouvant être représentées par $(O_1,..,O_n)$.

On utilisera aussi le concept fondamental de définition récursive Platoniste :

DEFINITION 2.13 :
Une *définition récursive Platoniste* est définie par la donnée de son *premier terme* t, dõune *propriété récursive* et dõune *clause de récursion* telle que :
(i)Le premier terme de la définition récursive est un concept particulier non-flou ayant la propriété récursive.
(ii)Si q est un terme de la définition récursive qui est un concept particulier non-flou, alors le clause de récursion définit un successeur s(q) de q dans la définition récursive, qui est un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction du concept q et qui a la propriété récursive. Ainsi s(q) doit être défini par une définition du type D(o,q).

Il est évident que si on a une définition récursive Platoniste, t étant le concept particulier non-flou premier terme de la définition récursive, s(t), s(s(t)),é ..,s(é (s(t)..) termes de la définition récursive sont des concepts non-flous définis uniquement en fonction du concept t. Il semble alors intuitivement évident quõil existe un ensemble dont les éléments sont les termes de la définition récursive, et qui est défini uniquement en fonction de t. Ceci signifie quõil existe un ensemble non-flou A(t) défini uniquement en fonction de t et dont les éléments correspondent à la définition : $D_R(o)$: « o est un terme de la Définition récursive de premier terme t ». Nous admettrons Axiomatiquement lõexistence de A(t).

Finalement, lõAxiome permettant dõobtenir lõexistence dõensembles dans la TLP, dont certains points ont été justifiés précédemment et dõautres sont admis dans la Théorie classique des ensembles (qui doit être vraie dans la TLP) est le suivant :

Dans cet Axiome :
-On rappelle quõun ensemble non-flou est un concept (particulier) non-flou pouvant représenter seulement un ensemble). Lorsquõon écrira que A et B sont des ensembles non-flous, cela supposera toujours que le concept (A,B), défini en 2.11 existe.
-A et B étant 2 ensembles, A *est inclus* dans B signifie classiquement « tout élément de A est élément de B ». Ceci signifie quõon pourra identifier le concept « est inclus » (entre 2 ensembles) à un concept primitif non-flou (Axiome 2.5b), sõil est utilisé dans une définition non-floue D(o) entre des ensembles non-flous ou o et un ensemble non-flou).
- On utilisera la propriété évidente *dõinclusion réciproque,* c'est-à-dire que si A et B sont 2 ensembles non-flous et si on a A est inclus dans B et B est inclus dans A, alors A est identique à B. (Ceci est la conséquence de lõAxiome 2.2C).
-Si on donne une définition sous la forme $D(o,O_1,..,O_n)$, $O_1,..,O_n$ étant des concepts non-flous, on supposera alors toujours implicitement que $D(o,O_1,..,O_n)$ est une définition de paramètres fixes $O_1,..,O_n$.
-On rappelle aussi que si on définit A comme étant un concept non-flou, on supposera implicitement que A est un concept particulier non-flou.

AXIOME 2.14 :
a)Si x est un concept (particulier) non-flou ne pouvant pas représenter lôEMP, alors il existe un ensemble non-flou noté {x}, dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition D(o) de paramètre fixe x : « o est identique à x » . Il est évident, utilisant la propriété dôinclusion réciproque que {x} est défini uniquement en fonction de x.

b)Pour toute Définition récursive Platoniste D_R, il existe un ensemble non-flou A(t), défini uniquement en fonction de t premier terme de la Définition récursive D_R, et dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition D_R(o) :« o est un terme de la Définition récursive D_R de premier terme t ».

c)Si A et B sont 2 ensembles non-flous, alors :
-Il existe un ensemble non-flou A×B dont les éléments sont ceux correspondant à la définition D(o) de paramètres fixes A,B: « Il existe a élément de A et b élément de B tel que o est identique à (a,b) ». Il est évident que ce concept particulier non-flou est défini uniquement en fonction de A et B.
-Il existe un ensemble non-flou *P*(A) dont les éléments sont ceux correspondants à la Définition D(o) de paramètre fixe A « o est inclus dans A » (équivalente à la Définition D(o) : « o est un ensemble et pour tout concept c(o) associé à la Définition D(c(o)) :« c(o) est élément de o », c(o) est élément de A », qui est non-floue dôaprès lôAxiome 2.5)). Il est évident que *P*(A) est défini uniquement en fonction de A.
-Il existe un ensemble non-flou AUB dont les éléments sont ceux correspondant à la Définition non-floue de paramètres fixes A,B: D(o)« o est élément de A ou o est élément de B ». De même, il est évident que AUB est défini uniquement en fonction de A et B.
On pourra montrer simplement quôil existe aussi des ensembles non-flous Až B et A/B, définis de façon analogues à AUB, et définis uniquement en fonction de A et B.

d)Si A est un ensemble non-flou et pour tout a élément de A on a défini un ensemble non-flou B(a) défini uniquement en fonction de a et de A, alors il existe un ensemble non-flou U_A(B(a)) dont les éléments correspondent à la définition non-floue D(o) de paramètre fixe A: « Il existe a élément de A tel que o est élément de B(a) ». Il est évident que cet ensemble est défini uniquement en fonction de A.
On pourra montrer simplement utilisant cet Axiome 2.14 quôil existe un concept non-flou ž $_A$(B(a)), défini de façon évidente, et défini uniquement en fonction de A.

e)Si D(o) est une définition non-floue basique, alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à D(o). Il est évident que cet ensemble est unique. Ceci est aussi vrai si on a des concepts particuliers non-flous O_1,é ,O_n, et quôon a la définition basique et non-floue D(o,O_1,..,O_n) de paramètres fixes O_1,..,O_n. Alors, on obtient lôexistence dôun concept non-flou A(O_1,..,O_n), défini uniquement en fonction de (O_1,é ,O_n) et dont les éléments correspondent à D(o,O_1,é ,O_n) . Ainsi, si (O_1,..,O_n) représente (O_{10},..,O_{n0}), il existe un unique ensemble A(O_{10},..,O_{n0}) dont les éléments correspondent à D(o,O_{10},..,O_{n0})

REMARQUE 2.15 :
a)On remarque quôen 2.14a), on a mis la condition que x ne peut pas représenter lôEMP. En effet, lôEMP est un objet mathématique extrêmement particulier, et on a donc choisi dans la TLP quôil ne puisse pas être élément dôun ensemble. De plus, on remarque que dans les paradoxes de Cantor et de Russel, dans les formes complètes (Définition 2.9) des définitions considérées D_C(o) et D_R(o), le concept « objet mathématique » est défini en utilisant lôexpression « existe dans lôEMP ». Au contraire, dans la forme complète dôune définition D(o) basique, on peut identifier le concept « objet mathématique » à un concept représentant lôélément dôun ensemble existant. Tout lôAxiome 2.14 se comprend intuitivement si on considère que pour quôun ensemble non-flou dont les éléments correspondent à une définition D(o) existe, il faut quôon puisse considérer que o doit être défini dans la forme complète de D(o) à partir de lôensemble vide , dôensembles non-flous et sans utiliser lô expression « existe dans lôEMP ».
b)On voit dans lôAxiome 2.14 que tous les concepts dont on obtient lôexistence sont non-flous. En effet, le concept de « concept non-flou » est essentiel dans la logique Platonicienne, et donc on doit toujours si possible nôintroduire que des concepts non-flous dans la TLP, afin que les Définitions utilisant ces concepts non-flous soient elles aussi non-floues dôaprès lôAxiome 2.5.
c)On remarque que dôaprès lôAxiome 2.14e), si D(o) est basique et non-floue mais quôil nôexiste aucun objet correspondant à D(o), alors il existe un ensemble non-flou dont les éléments correspondent à D(o) et qui est lôensemble vide.

d)On remarque que lôAxiome 2.14 ne permet pas dôobtenir un ensemble ayant lôEMP comme élément, lôEMP nôétant ni un ensemble ni un couple. Cependant un ensemble pourra contenir un couple dont lôEMP est ûun des termes.
e)Il est possible quôon puisse obtenir un Axiome 2.14 plus court. Par exemple on nôutilisera pas dans cet article le point d) de cet Axiome.

Nous allons maintenant établir des Lemmes et Propositions fondamentaux, qui nous permettrons dôobtenir plus loin lôexistence de concepts généraux non-flous de la TLP qui pourront être identifiés aux concepts classiques.

LEMME 2.16 :

A étant un ensemble non-flou , alors il existe un ensemble noté e(A), défini uniquement en fonction de A, quôon peut représenter par :

e(A)={{x}/x est élément de A}.({x} représente le concept particulier non-flou introduit en 2.14a))

Preuve :

Dôaprès la Remarque 2.15d), on supposera que A ne contient pas lôEMP comme élément.

A étant un ensemble non-flou, x étant le concept non-flou associé à « o est élément de A », on sait dôaprès 2.14a) que le concept non-flou {x} existe et est défini uniquement en fonction de x. On considère alors la Définition D(o) de paramètre fixe A: « Il existe x élément de A tel que o est identique à {x} ». Cette définition est non-floue dôaprès lôAxiome 2.5. De plus il est évident que « D(o) est vraie » entraîne que o est élément de *P*(A), *P*(A) étant un concept non-flou dôaprès lôAxiome 2.14c). Et donc dôaprès lôAxiome 2.14e), il existe un ensemble e(A) dont les éléments correspondent à D(o). Si A représente lôensemble vide, il est évident que e(A) représente aussi lôensemble vide. Dôaprès lôAxiome 2.14e, e(A) est défini uniquement en fonction de A.

En accord avec la Remarque 2.15d), e(A) ne contenant que des ensembles, il ne peut avoir lôEMP comme élément.

PROPOSITION 2.17 :

A et B étant 2 ensembles non-flous, il existe un ensemble non-flou, noté *F*(A,B), défini uniquement en fonction de A et B, quôon peut identifier à lôensemble des *applications* de A dans B.

Preuve :

A et B étant 2 ensembles non-flous, dôaprès 2.14c), il existe un ensemble non-flou *P*(A×B) défini uniquement en fonction de A et B, défini en 2.14c).
On considère alors la définition de paramètres fixes A,B:
D(f) : « f est un élément de *P*(A×B) et pour tout a élément de A, il existe un et unique élément de f de premier terme a ». (On peut considérer qu « un élément de f » est le concept c(f) associé à « c(f) est élément de f »).
Cette définition est évidemment basique et elle est non-floue dôaprès lôAxiome 2.5. Donc dôaprès lôAxiome 2.14e), il existe un ensemble non-flou *F*(A,B), défini uniquement en fonction de A et B, dont les éléments correspondent à D(f). Il est évident que *F*(A,B) convient.

REMARQUE 2.17A:

a)Si f est élément de *F*(A,B), et si a est élément de A, on appellera classiquement ***lôimage*** de f par a, et on notera f(a) le concept associé à « (a,o) est élément de f », défini uniquement en fonction de f,a, qui est non-flou dôaprès lôAxiome 2.5.
b)Si i est un concept non-flou représentant seulement des éléments de A, g étant un concept non-flou représentant seulement des éléments de *F*(A,B) alors g(i), concept associé à la définition D(o) :« (i,o) est élément de g » est un concept non-flou dôaprès lôAxiome 2.5, et évidemment défini uniquement en fonction de g et i. On peut donc utiliser de tels concepts g(i) dans des définitions non-floues.
c)De même si on a une définition D(o), quôon a un concept non-flou g représentant seulement des éléments de *F*(A,B) et que dans la définition D(o), un symbole c(o) soit associé à une définition utilisant seulement o et des concepts non-flous pour définir c(o), alors g(c(o)) étant un symbole associé à la définition D(o_g) : «(c(o),o_g) est élément de g » c'est-à-dire « o_g est lôimage de c(o) par g » utilise seulement o et des concepts non-flous pour définir o_g, et donc une définition non-floue pourra utiliser le symbole g(c(o)). De même, si on a une définition D(o) dans laquelle o est une application, et que i est un concept non-flou, D(o) pourra utiliser le symbole o(i) en étant non-floue. Ce qui précède justifie que le symbole « (   ) », utilisé dans une

expression « o( ) » ou « f( ) », f étant un concept non-flou ne pouvant représenter que des applications, peut toujours être utilisés dans une définition non-floue D(o), et donc peut être considéré comme un concept relationnel non-flou.

LEMME 2.18 :
a)A et B étant 2 ensembles non-flous non vides, si a est un concept pouvant représenter tout élément de a_0 de A et si on a un concept non-flou f(a,A,B) associé à une définition D(o,A,B) et défini uniquement en fonction de a,A et B pouvant représenter seulement un élément de B, alors il existe un concept non-flou f associé à la définition D_f(o,A,B) : « o est un élément de *F*(A,B) et pour tout élément a de A, f(a,A,B) est lôimage de a par o » défini uniquement en fonction de A et B.

b)Dans de nombreux cas f(a) nôest pas défini uniquement en fonction de a,A,B, mais en fonction de a,A,B,O_1,é ..,O_n, O_1,é ,O_n étant des concepts non-flous. Alors si A,B, O_1,..,O_n étant fixés a est un concept pouvant représenter tout élément a_0 de A, et f(a,A,B,O_1,..,O_n) est un concept non-flou associé une définition D(o,a,A,B,O_1,..,O_n) est défini uniquement en fonction de a,A,B,O_1,..,O_n et peut représenter seulement un élément de B, alors il existe un concept non-flou f associé à la définition de paramètres fixes A,B,O_1,..,O_n D_f(o,A,B,O_1,..,O_n) : « o est un élément de *F*(A,B) et pour tout a élément de A, lôimage de a par o est f(a,A,B,O_1,..,O_n) », f étant défini uniquement en fonction de A,B,O_1,..,O_n pour cette définition.

Preuve :
a)Dôaprès lôAxiome 2.5 et la Remarque 2.12, D_f(o,A,B) est une définition non-floue puisque f(a,A,B) est un concept non-flou.
On considère alors la définition D_1(o) de paramètres fixes A,B:
D_1(o) : « Il existe a élément de A , tel que o est identique à (a,f(a,A,B) ».

Dôaprès la Définition 2.11, elle signifie , A,B étant fixés représentant A_0,B_0 :
« Il existe un élément a_0 de A_0 tel que o est identique à (a_0,f(a_0,A_0,B_0) (Ce qui nôest possible que si f(a,A,B) est défini pour (a,A,B) représentant (a_0,A_0,B_0) ».

Puisque « D_1(o) est vraie » entraîne o est élément de A×B, D(o) est basique.
De plus D_1(o) est non-floue dôaprès lôAxiome 2.5 et la Remarque 2.12a).
Donc dôaprès lôAxiome 2.14e) il existe un ensemble non-flou f_1(A,B) défini uniquement en fonction de A, B et dont les éléments correspondent à D_1(o).
Pour A,B fixés représentant A_0 et B_0, il est évident que f_1(A_0,B_0) correspond à la définition D_f(o,A_0,B_0).
Donc il existe un concept non-flou f(A,B) associé à la définition D_f(o,A,B) et on montre aisément quôil est défini uniquement en fonction de A et B.

b)Pour obtenir que ,A,B,O_1,..,O_n étant fixés , a peut représenter tout élément a_0 de A, il suffit dôaprès la Remarque 2.12b) que le concept a associé à la définition « o est élément de A » soit défini par un nouveau symbole après la définition de A,B,O_1,..,O_n et pour A,B,O_1,..,O_n fixés.
Il suffit ensuite de remplacer D_1(o,a,A,B) par D_1(o,a,A,B,O_1,é ,O_n). Alors on utilise le concept f(a,A,B,O_1,..,O_n) à la place du concept f(a,A,B).

On remarque que si a était défini avant O_1,..,O_n et que par exemple O_1 était défini en fonction de a, alors même si f(a) était défini uniquement en fonction de a,A,B,O_1,..,O_n, O_1 fixé à O_{10} entraînerait dôaprès la Définition 2.11d que a fixé par exemple à a_0, et donc alors seule lôimage de a_0 serait défini pour O_1 fixé à O_{10}. Et donc on nôobtiendrait pas de fonction f définie uniquement en fonction de A,B,O_1,..,O_n.

LEMME 2.19 :
A et B étant 2 ensembles non-flous ne pouvant pas représenter lôensemble vide et f étant une application de A dans B, alors pour tout b dans B il existe un ensemble non-flou, noté f^{-1}(b) dont les éléments correspondent à la définition D(o,b,f) : « b est lôimage de o par f » (ou « (o,b) est élément de f »), qui est défini uniquement en fonction de f et b.

Preuve :

Soit A, B 2 ensembles non-flous, f le concept associé à la définition de paramètres fixes A,B « o est élément de *F*(A,B) » et b le concept associé à la définition de paramètre fixe B :« o est élément de B ».
f et b sont des concepts non-flous dôaprès lôAxiome 2.5 et le Lemme 2.17.
On considère alors la définition de paramètres fixes f et b:
D(o,b,f) : « (o,b) est élément de f »
Il est évident que D(o,b,f) est basique et quôelle est non-floue dôaprès lôAxiome 2.5.
Donc il existe dôaprès lôAxiome 2.14e) un ensemble non-flou f^{-1}(b) dont les éléments correspondent à D(o,b,f),et qui est défini uniquement en fonction de f et b.

On a aussi le Lemme :

LEMME 2.20 :
A étant un ensemble non-flou ne pouvant représenter lôensemble vide, p(A) étant le concept associé à « o est élément de *P*(A) », il existe un concept non-flou f associé à la définition de paramètres fixes A,p(A) : D_f(o,A,p(A)) : « o est élément de *F*(A,{ů,{ů}}) et pour tout a élément de A (a est élément de p(A) ») est équivalent à (lôimage de a par o est {ů}) », f étant défini uniquement en fonction de A et p(A).

Preuve :
On suppose donc que A ne peut représenter lôensemble vide.
Nous représenterons ů par le symbole 0 et {ů} par le symbole 1.
ů est un concept non-flou représentant un unique objet dôaprès lôAxiome 2.5 et donc {ů} est un concept non-flou représentant un unique objet dôaprès lôAxiome 2.14a). {ů,{ů}} est un ensemble non-flou représentant un unique objet dôaprès lôAxiome 2.14.
A étant un concept non-flou et p(A) étant le concept associé à « o est élément de *P*(A) », dôaprès lôAxiome 2.5 p(A) est un concept non-flou.
Donc dôaprès lôAxiome 2.5 et la Remarque 2.5A définissant le concept « est équivalent », D_f(o,A,p(A)) est non-floue.

On définit alors le concept a associé à « o est élément de A » pour A,p(A) fixés. (a est donc un nouveau symbole défini après les concepts A et p(A) et peut représenter tout élément a_0 de A pour A,p(A) fixés dôaprès la Remarque 2.12b et le Lemme 2.18).

On considère la définition de paramètres fixes a,A,p(A):
D(o,a,A,p(A)) : « o est élément de {0,1} et («o est identique à 1 »est équivalent à « a est élément de p(A) ».
Cette définition est évidemment basique car « D(o,A,p(A)) est vraie » entraîne que o est élément de {0,1} qui est un ensemble existant, et elle est non-floue dôaprès lôAxiome 2.5.
On suppose a,A,p(A) fixés à a_0,A_0,p_0(A_0) (Définition 2.11).
p_0(A_0) étant un ensemble, on a ou bien « a_0 est élément de p_0(A_0) » ou bien « a_0 nôest pas élément de p_0(A_0) ».
Si a_0 est élément de p_0(A_0), f(a_0)=1 est le seul objet correspondant à D(o,a_0,A_0,p_0(A_0)).
Si a_0 nôest pas élément de p_0(A_0), f(a_0)=0 est le seul objet correspondant à D(o,a_0,A_0,p_0(A_0)).
Donc on a un concept non-flou existant f(a,A,p(A)) associé à D(o,A,p(A)) qui est défini uniquement en fonction de a,A,{0,1} et p(A).
Il en résulte dôaprès le Lemme 2.18b) quôil existe un concept non-flou f_1(A,p(A)) qui représente un unique élément de *F*(A,{0,1}), tel que lôimage de chaque a élément de A par f_1(A,p(A)) soit f(a,A,p(A)) défini précédemment.
Pour A,p(A) fixés à A_0,p_0(A_0), il est évident que f_1(A_0,p_0(A_0)) correspond à la définition D_f(o,A_0,p_0(A_0)) et donc il existe un concept non-flou associé à la définition Df(o,A ,B) et on montre facilement quôil est défini uniquement en fonction de A,p(A).

On démontre de façon analogue la réciproque du Lemme précédent :

LEMME 2.21 :
A étant un ensemble non-flou, et f étant le concept non-flou associé à « o est élément de *F*(A,{0,1}), il existe un concept non-flou associé à la définition de paramètres fixes A,f D_p(o,A,f) : « o est un élément de *P*(A) et pour tout a élément de A, (f(a)=1) est équivalent à « a est élément de o », défini uniquement en fonction de A et f.

3.CONCEPTS BASIQUES FONDAMENTAUX

En utilisant les chapitres précédents, on peut alors montrer théoriquement quôn peut identifier les concepts mathématiques classiques à des concepts non-flous existants dans lŒMP ,c'est-à-dire que les concepts mathématiques classiques existent au sens Platoniste.

PROPOSITION 3.1 :
Il existe un concept non-flou, à la fois général et particulier, quôn peut identifier à **N**.

Preuve :
On considère la définition récursive Platoniste définie par :
-ů (lênsemble vide), est le premier terme de la définition récursive ayant la propriété récursive P(ů) : « ů est un ensemble »..
-Si q est un terme de la définition récursive ayant la propriété récursive P(q) : « q est un ensemble », la clause de récursion définit le terme successeur de q dans la définition récursive :s(q) est le concept associé à la définition « o est identique à e(q)U{ů} », e(q) étant le concept défini uniquement en fonction de q au Lemme 2.16.(e(q)={{x}/ x est élément de q}.
Il est évident que q étant un concept non-flou ayant la propriété récursive, c'est-à-dire représentant un ensemble, s(q) est un concept non-flou existant dâprès lÂxiome 2.14c) et que de plus il est défini uniquement en fonction de q, puisque dâprès le Lemme 2.16 e(q) est défini uniquement en fonction de q. De plus s(q) est un ensemble et donc il a la propriété récursive.
Donc on a bien une définition récursive Platoniste.
Dâprès lÂxiome 2.14b), il existe un ensemble noté A(ů), défini uniquement en fonction de ů et donc unique puisque ů représente un unique objet, et dont les éléments sont les termes de la définition récursive, c'est-à-dire :ů, {ů},{ů,{ů}}, {ů,{ů},{{ů}}},é , quôn identifiera à 0,1,2,3é .On identifiera donc A(ů), concept général non-flou, à **N** , et de même 0,.,3.. à des concepts généraux non-flous. **N** représentant toujours un unique objet, on peut aussi le considérer comme un concept particulier.
Dâprès la Remarque 2.12j), **N** peut être considéré comme un concept général.

De plus 0,1,2,3 peuvent aussi être considérés comme des concepts généraux :
Ainsi, si i est un concept général représentant un terme de la définition récursive Platoniste précédente, représenté par les chiffres usuels, alors on définit i+1 exprimé par les chiffres usuels comme le successeur s(i) de i dans la définition récursive Platoniste précédente. Dâprès la Remarque 2.12j), on peut considérer que i+1 est un concept général, car il est défini seulement à partir de concepts généraux (0 et i).

REMARQUE 3.2 :
a)On remarque que le nombre dêlément de chaque terme de la définition récursive est égal au naturel quîl représente. On dira donc quûn ensemble A a n éléments sîl existe une bijection entre A et lênsemble représenté par n.
b)De plus, on remarque que les termes de la définition récursive vérifient les Axiomes de Peano, c'est-à-dire, remplaçant « nombre » par « terme » :

1)Il existe un premier terme : ů
2)Chaque terme de la suite q a un unique successeur immédiat s(q).
3)ů nêst le successeur immédiat dâucun terme (Puisque sinon il contiendrait ů et serait donc non-vide.)
4)Si q_1 et q_2 sont 2 termes de la suite ayant le même successeur immédiat q_3 alors q_1 est identique à q_2 (Ceci se montre facilement).
5)Toute propriété Q(q) appartenant à ů et au successeur immédiat de tout terme ayant cette propriété appartient à tous les termes. (Ceci est évident car Q(ů) entraîne Q(s(ů))é .qui entraîne de proche en proche Q(n), n terme quelconque de la suite).

c)Puisque les éléments de A(ů) vérifient les Axiomes de Peano dont on obtient les propriétés classiques des naturels, cela signifie quôn peut obtenir pour A(ů) toutes les propriétés quôn obtient classiquement pour **N**.

PROPOSITION 3.3 :
Il existe des concepts non-flous, à la fois généraux et particuliers, quôn peut identifier à **Z** et **Q**.

Preuve :
On a montré lôexistence dôun concept non-flou représentant un unique objet identifié à **N**.
Dôaprès lôAxiome 2.14c), **N**×{1} est un ensemble non-flou représentant un unique objet (identifié à $\mathbf{Z}^+$), de même que **N***×{0}(identifié à $\mathbf{Z}^{*-}$) où **N***=N/{0} (On rappelle quôon a identifié 1 et 0 à des objets existant).
Et donc dôaprès lôAxiome 2.14, **N**×{1}U**N***×{0} est un ensemble non-flou existant, représentant un unique objet quôon identifiera à **Z**.
Z×**Z** est un concept non-flou existant dôaprès lôAxiome 2.14. Et donc **Z**×**Z**/**Z**×{(0,1)} est un concept non-flou existant quôon identifiera à **Q**.
Q et **Z** peuvent être considérés comme des concepts généraux dôaprès la Remarque 2.12j).
De plus, puisquôils représentent chacun un unique objet, ils peuvent aussi être considérés comme des concepts particuliers.

PROPOSITION 3.4 :
Lôaddition et la multiplication dans **N**,**Q**,**Z** peuvent être identifiés à des concepts existants non-flous, à la fois généraux et particuliers.

Preuve :
N×**N** est un ensemble non-flou existant dôaprès lôAxiome 2.14.
On peut toujours considérer que **N** et **N**×**N** sont fixés, puisque ces concepts représentent chacun un unique ensemble ;
Pour tout (a,b) élément de **N**×**N**, puisquôon a vu que les éléments de lôensemble identifié à **N** ont exactement les mêmes propriétés classiques des naturels, on peut obtenir un concept mathématique non-flou défini uniquement en fonction de a et b, appartenant à **N** et identifié à a+b (On peut considérer la définition récursive Platoniste de premier terme (a,0) et telle que s((p,i))=(p+1,i+1)). Alors dôaprès le Lemme 2.18 il existe un unique concept non-flou élément de *F*(**N**×**N**,**N**), noté « ad » tel que pour tout (a,b) de **N**×**N**, lôimage de (a,b) par lôapplication « ad » soit a+b.
On identifiera ad avec lôaddition dans **N**.
« ad » peut être considéré comme un concept général dôaprès la Remarque 2.12j).
De même on obtient lôexistence dôun concept général non-flou quôon peut identifier avec la multiplication dans **N**.
Utilisant lôexistence de lôaddition et de la multiplication dans **N**, il est facile utilisant le Lemme 2.18 dôobtenir des concepts généraux non-flous quôon peut identifier avec lôaddition et la multiplication dans **Z** et **Q**.
Ces concepts obtenus précédemment représentant toujours un unique, on peut aussi les considérer comme des concepts particuliers.

PROPOSITION 3.5 :
Il existe un concept non-flou, à la fois général et particulier, quôon peut identifier à **R**.

Preuve :
On a déjà montré lôexistence de concepts non-flous pouvant être identifiés à **Q** et à **N**.
Dôaprès la Proposition 2.17 il existe un concept non-flou représentant un objet unique *F*(**N**,**Q**), dont on appellera les éléments « suites ».(« suite » est donc un concept général).
On considère alors la définition classique dôune suite de Cauchy :
D_{Cauchy}(o) : « o est un élément de *F*(**N**,**Q**) et pour tout Ůrationnel strictement positif, il existe un naturel N tel que pour tout i naturel supérieur à N et pour tout j naturel supérieur à N, on ait |i(o)-j(o)|<Ů où i(o) est le $i^{ème}$ terme de o, c'est-à-dire lôimage de i par o. »

D_{Cauchy}(o) est évidemment basique puisquôelle entraîne que o est élément de *F*(**N**,**Q**) qui est un concept non-flou existant.
De plus dans D_{Cauchy}(o) on peut identifier « Ůrationnel strictement positif » avec « Ůest élément de $\mathbf{Q}^{*+}$ » qui représente un concept non-flou dôaprès lôAxiome 2.5.
De plus N est le concept associé à « o est élément de **N** » et est donc un concept non-flou.
On peut identifier « i naturel supérieur à N » avec « i est le concept associé à « o est élément de **N** et sub(o,N) est élément de **N** » », sub étant le concept non-flou représentant la soustraction dans **Z**, identifiant classiquement **N** à $\mathbf{Z}^+$. Donc dôaprès lôAxiome 2.5 et la Remarque 2.17A, i est un concept non-flou, et donc on peut identifier « i naturel supérieur à N » à un concept non-flou.

Enfin on peut remplacer lôexpression « |i(o)-j(o)|<Ů où i(o) est le $i^{ème}$ terme de o » par lôexpression « i(o) concept associé à D(i(o)) :«(i,i(o)) est élément de o », j(o) concept associé à D(j(o))(analogue à D(i(o)) »et sub(abs(sub(i(o),j(o)),Ů est élément de $\mathbf{Q}^{*-}$ », avec « sub » est un concept non-flou identifié à la soustraction dans **Q**, et « abs » est un concept non-flou identifié à la valeur absolue.
On a donc, utilisant les Remarque 2.5Ac) et 2.17A)c), $D_{Cauchy}(o)$ est équivalente à une définition utilisant pour définir o seulement des concepts non-flous, et donc elles est non-floue dôaprès la lôAxiome 2.5.
De plus dôaprès la Remarque 2.12j), $D_{Cauchy}(o)$ est une définition générale.
Donc dôaprès lôAxiome 2.14e), il existe un ensemble non-flou dont les éléments sont les suites de Cauchy qui est un concept général et quôon identifiera à **R**.

PROPOSITION 3.6 :
Si O(1),é ,O(n) sont des concepts particuliers non-flous, alors il existe un concept particulier non-flou défini uniquement en fonction de O(1),..,O(n) quôon peut identifier à (O(1),é ,O(n)).

Preuve :
Sôil nôy a quôun concept particulier O(1), on considère le concept particulier {(O(1),0)}, qui existe et est non-flou dôaprès lôAxiome 2.14e). (Identifiant 0 avec lôobjet correspondant, c'est-à-dire lôensemble vide).
Sôil nôy a que 2 concepts particuliers, O(1),O(2), on a dôaprès lôAxiome 2.5 lôexistence du concept particulier non-flou (O(1),O(2)), défini uniquement en fonction de O(1) et O(2).
Sôil y a au moins 3 concepts particuliers O(1),..,O(n), on définit alors pour i dans {1,..,n} le concept {(i,O(i))}, qui est un concept particulier existant non-flou dôaprès lôAxiome 2.14 et défini uniquement en fonction de O(i).
On admettra toujours que O(1),.,O(n) étant des concepts particuliers non-flous, il existe toujours des objets $O_0(1),..,O_0(n)$ pouvant être représentés simultanément par O(1),..,O(n).
En effet, on définit toujours successivement des concepts particuliers non-flous $c_1,..,c_r$ de la façon suivante :
On a des concepts généraux de base non-flous $c_{b1},..,c_{bk}$ (Par exemple $c_{b1},..,c_{bk}$ sont les concepts **N**,**Z**, « ensemble »..).
On définit alors successivement les concepts particuliers $c_1,..,c_r$ de la façon suivante :
On définit dôabord le concept particulier non-flou c_1 en utilisant des concepts généraux parmi $c_{b1},..,c_{bk}$. Dôaprès la définition dôun concept particulier , c_1 peut au moins représenter un objet c_{10}.
Puis, $c_1,..,c_{i-1}$ étant des concepts particuliers non-flous définis et , $c_1,..,c_{i-1}$ pouvant représenter simultanément $c_{10},..,c_{i-10}$, on définit c_i concept particulier non-flou ou bien en fonction de concepts parmi $c_1,..,c_{i-1}$, et donc dôaprès la Définition 2.11 $c_1,..,c_{i-1}$ représentant simultanément $c_{b10},..,c_{i-10}$, c_i peut représenter au moins un objet c_{i0}, ou bien en utilisant seulement des concepts généraux parmi $c_{b1},..,c_{bk}$, et alors c_i peut au moins représenter un objet c_{i0} dôaprès la définition dôun concept.
Et donc $c_1,..,c_i$ peuvent représenter simultanément $c_{10},..,c_{i0}$.
Ceci étant vrai pour tout i, on obtient bien $c_1,.,c_r$ peuvent représenter simultanément au moins des objets $c_{10},..,c_{r0}$. On définira toujours des concepts non-flous de la façon précédente.

Si on définit des concepts généraux parmi $c_1,..,c_r$, on obtient le même résultat :
On définit un concept particulier c_i soit en fonction de concepts particuliers parmi $c_1,..,c_{i-1}$, en pouvant utiliser aussi des concepts généraux parmi $c_{b1},..,c_{bk},c_1,..,c_{i-1}$, soit en utilisant seulement des concepts généraux parmi $c_{b1},..,c_{bk},c_1,..,c_{i-1}$. Comme précédemment, si les concepts particuliers $c_{p1},..,c_{ps(i)}$ parmi $c_1,..,c_{i-1}$ représentent simultanément les objets $c_{p10},..,c_{ps(i)0}$, alors $c_{p1},..,c_{ps(i)}$,c_i peuvent représenter simultanément des objets $c_{p10},..,c_{i0}$.
On rappelle aussi que dôaprès la Remarque 2.5A, si on a un concept général o_{1G} associé à une définition $D_1(o_1)$, on peut toujours utiliser dans une définition D(o), un concept particulier O_1 associé à $D_1(o_1)$ à la place de o_G.

Donc il existe au moins des objets $O_0(1),..,O_0(n)$ pouvant être représentés simultanément par O(1),..,O(n).
Dôaprès lôAxiome 2.14, il existe donc un ensemble non-flou, {(1,O(1)}Ué U{(n,O(n))}, (On montre facilement quôil est défini uniquement en fonction de O(1) ,é ,O(n), (car O(1),..,O(n) représentant $O_0(1),..,O_0(n)$, ses éléments sont $(1,O_0(1)),..,(n,O_0(n))$ et on identifiera ce concept à (O(1),..,O(n)).
Ceci justifie a posteriori la définition du concept $(O_1,..,O_n)$ donné en 2.11d). On rappelle cependant quôon peut toujours utiliser lôexpression « $O_{10},..,O_{n0}$ pouvant être représentés (simultanément) par $O_1,..,O_n$ » au lieu de « $(O_{10},..,O_{n0})$ pouvant être représenté par $(O_1,..,O_n)$ », car les 2 expressions précédentes sont équivalentes.

PROPOSITION 3.7 :

Des concepts non-flous pouvant être identifiés à des corps, à des espaces vectoriels de toute dimension existent.

Preuve :
On a vu lôexistence dôun concept non-flou pouvant être identifié à **Q**, de même que des concepts non-flous pouvant être identifiés à la multiplication et à lôaddition dans **Q**, quôon notera × et +.
Il en résulte que dôaprès la Proposition 3.6, il existe un concept non-flou (**Q**,+,×), qui a les mêmes propriétés quôun corps et donc quôon peut identifier à un corps dans sa définition classique.
De même, utilisant la multiplication et lôaddition dans **Q**, on peut obtenir lôexistence de concepts non-flous identifiés à la multiplication et lôaddition dans **R**. On peut ensuite obtenir lôexistence de concepts non-flous identifiés à lôaddition dans $\mathbf{R}^n$, identifié à $F(\{1,..,n\},\mathbf{R})$ et à la multiplication par un scalaire, notée ., application de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$.
Alors dôaprès la proposition 3.6, il existe un concept non-flou ($\mathbf{R}^n$,+,.), qui a exactement les propriétés classiques dôun espace vectoriel de dimension n.
Remplaçant $\mathbf{R}^n$ par $F(\mathbf{N},\mathbf{R})$, on obtient lôexistence dôun concept non-flou ayant les propriétés dôun espace vectoriel de dimension infinie.

En procédant comme précédemment, on peut montrer théoriquement lôexistence dans lôEMP de concepts non-flous pouvant être identifiés à nôimporte quel concept mathématique classique.

4.CONCLUSION

Nous avons dans cet article exposé les bases dôune Théorie Logique Platonicienne (TLP). On a donné les méthodes permettant de justifier théoriquement que les concepts mathématiques classiques peuvent être identifiés à des objets mathématiques existant dans lôEspace Mathématique Platonique. On a donc justifié théoriquement lôexistence Platoniste de ces concepts mathématiques classiques. Il est remarquable quôon obtient lôexistence de ces concepts mathématiques classiques à partir de lôensemble vide. La TLP des ensembles apparaît consistante en évitant les Paradoxes de Cantor et de Russel grâce à lôAxiome 2.14e). On a introduit le concept fondamental de définition non-floue, et admis lô Axiome 2.5 permettant dôobtenir quôune définition est non-floue. Une justification théorique complète de cet Axiome 2.5 sera donnée dans un second article.

La TLP donne donc une signification théorique Platoniste à lôensemble des mathématiques classiques, ce qui nôest pas le cas dans les théories mathématiques actuelles de logique basées sur le formalisme. Elle est complètement nouvelle puisque bien quôil existe beaucoup de théories philosophiques sur le Platonisme (voir les Références) et que la plupart des mathématiciens ont lôidée dôune signification réelle des mathématiques. Nous développerons la TLP dans un second article, où nous verrons comment la théorie mathématique de logique Platoniste (TLP) peut interpréter lôensemble des mathématiques.

References

1.Nagel, Newman,Godel, Girard: Le théorème de Godel, Seuil, Paris 1992
2. E.J. Borowski, J.M Borwein, Mathematics, Collins Dictionnary (G.B, 1989)
3. E. Giusti, La naissance des objets mathématiques ,Ellipses, (Paris, 2000)
4. Largeault, Logique Mathematiques, Armand Colin,(Paris ,1992)
5. P.Thiry, Notions de logique,Deboeck Université,(Bruxelles ,1998)
6..Jennifer Bothamley, Dictionary of Theories, (visible ink press,2002)
7.Thierry Delort, Théories dôor 2ième édition, Editions Books on demand, Paris (2011), site web :www.theoriesdor.com

COMPLEMENTS DE LA TMP 26 Aout 2011

1.On peut montrer (par une double récurence) que si O_1,..,O_n sont des concepts non-flous définis tels que dans la TMP, et si O_{10},é ,O_{n0} sont des objets quelconques, alors ou bien O_1,..,O_n peut représenter simultanément O_{10},..,O_{n0}, ou bien O_1,..,O_n ne peut représenter simultanément O_{10},..,O_{n0}, et on ne peut avoir à la fois O_1,..,O_n peut représenter simultanément O_{10},..,O_{n0} et O_1,.. ,O_n ne peut représenter simultanément O_{10},..,O_{n0}.

2.Si on a une définition non floue D(o,O_1,.,O_n) telle quôon lôa définie, on peut définir le concept général O(O_1,..,O_n) par :O(O_1,..,O_n) peut représenter lôobjet O_0 sôil existe O_{10},..,O_{n0} tels que O_1,.,O_n peut représenter simultanément O_{10},..,O_{n0} et O(O_{10},..,O_{n0}) peut représenter O_0.
Utilisant 1. on peut montrer que le concept général O(O_1,..,O_n) est un concept non-flou. (On commence par montrer la proposition pour la définition « o est identique à (O_1,é ,O_n) »).
Il est souvent utile de considérer la définition « o est un représenté du concept général O(O_1,..,O_n) ».

3. Il est utile et simplificateur dôadmettre dans la TMP lôAxiome que si P et Q sont 2 propositions équivalentes (au sens « sôentrainent mutuellement »), alors NonP et NonQ sôentrainent mutuellement.
On peut alors montrer que si P entraine Q, alors NonQ entraine nonP (considérant que (P et Q) est équivalente à P).

4.Il est utile de définir une fonction dôun concept général D dans un concept général A, comme un concept général non-flou F pouvant représenter seulement des couples dôobjets (D_0,A_0), avec D_0 représenté de D et A_0 représenté de A, et tel que pour tout représenté D_0 de D, il existe un et un seul représenté de F de premier terme D_0.

Article:LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS
Auteur:Thierry DELORT
Date :31 Octobre 2011

Résumé :

Dans un premier article [(1)], nous avons exposé les bases dôune Théorie mathématique Platoniste , la Théorie de Logique Platoniste (TLP), en montrant comment par cette théorie on pouvait obtenir lôexistence au sens Platoniste des concepts mathématiques de base (**N**,**Q**,**R**, les espaces vectorielsé)

Dans ce second article, on montre comment la TLP permet dôinterpréter lôensemble des théories mathématiques de façon Platoniste. On montre aussi que la TLP donne des justifications théoriques au Principe du Tiers-exclu et au Principe de Non-contradiction qui sont des Lemmes de la TLP, à la consistance des théories mathématiques classiques ainsi quôà un Axiome fondamental admis dans le premier article.

Nous voyons donc dans ce second article que la TLP permet dôinterpréter lôensemble des mathématiques.

Mots clés : Logique - Platonisme - Principe du Tiers-exclu - Principe de Non-contradiction.

1.INTRODUCTION

Dans un article précédent [(1)], on a exposé les bases dôune théorie mathématique Platoniste (la Théorie de Logique Platonicienne(TLP)), de logique et des fondations des mathématiques.

Dans cet article, nous montrons comment la TLP peut interpréter lôensemble des mathématiques, en donnant une interprétation Platoniste à toutes les théories mathématiques classiques ainsi quôaux propositions usuelles et aux démonstrations mathématiques. Nous verrons que cette interprétation est totalement nouvelle et quôelle donne une justification théorique nouvelle aux Principe du Tiers-exclu et au Principe de Non-contradiction, qui sont admis dans les théories classiques de logique basées sur le formalisme. Elle donne aussi une justification théorique à la consistance des théories mathématiques classiques.

On rappelle lôAxiome fondamental de la TLP :

AXIOME 1.1 :
a)Un *Espace mathématique Platonique* (lôEMP), existe.
b)Les *objets mathématiques* existent dans lôEMP.

On rappelle et on donne les définitions suivantes :

DEFINITION 1.2 :
(i)Dôaprès lôarticle [(1)], on rappelle que si on a une définition D(o), et quôO$_0$ est un objet mathématique tel quôon ait « D(O$_0$) est vraie », on dira que « O$_0$ *correspond à la définition* D(o) ». Si O$_0$ est un objet mathématique tel quôon ait « Non (« D(O$_0$) est vraie »), on dira que « O$_0$ *ne correspond pas à la définition* D(o) ».
On dira que O est *un symbole associé à une définition* D(o) si :
« O *peut représenter un objet* O$_0$ » signifie « O$_0$ correspond à D(o) », et « O *ne peut pas représenter* O$_0$ » signifie « O$_0$ ne correspond pas à D(o) ».
(ii)Un symbole O associé à une définition D(o) sera un *concept existant associé* à D(o) sôil existe au moins un objet mathématique O$_0$ correspondant à D(o), et que donc O peut représenter au moins un objet existant.
On distingue 2 sortes de concepts :
-Un *concept particulier* O associé à une définition D(o) peut représenter tout objet correspondant à D(o) mais représente le même objet partout où il est utilisé.
-Un *concept général* associé à une définition D(o) peut représenter tout objet correspondant à D(o) quels que soient les objets représentés par des concepts particuliers définis avant D(o).

(iv)On rappelle qu'une définition D(o) est *non-floue* si tout objet existant O_0 ou bien correspond à D(o) ou bien ne correspond pas à D(o) (D(o) *binaire*) et si pour aucun objet existant O_0 on a « O_0 correspond à D(o) » et « O_0 ne correspond pas à D(o) »(D(o) *cohérente*).

Il en résulte que si un concept O est associé à une définition D(o) non-floue (On dira alors O *non-flou*), pour tout objet O_0 on a ou bien « O_0 peut être représenté par O » ou bien « O_0 ne peut pas être représenté par O », et pour aucun objet O_0 on a « O peut représenter O_0 » et « O ne peut pas représenter O_0 ».
Il faut donc que O soit non-flou pour que le concept « peut représenter » ait sa signification intuitive.
On a établi dans l'article [(1)] l'existence du concept non-flou $(O_1,…,O_n)$, $O_1,..,O_n$ étant des concepts non-flous. Si $O_{10},..,O_{n0}$ sont des objets simultanément représentés par les concepts $O_1,..,O_n$, le concept $(O_1,..,O_n)$ représente la séquence $(O_{10},..,O_{n0})$.

On a vu dans l'article [(1)] que pour qu'une définition D(o) pouvait être associée à un concept général, si les seuls concepts particuliers utilisés par D(o) pour définir o étaient définis dans D(o) à partir de concepts généraux ou étaient eux-mêmes des concepts généraux. On a appelé *définition générale* une telle définition.
On admettra que « un objet mathématique », « un ensemble », et « l'EMP » sont des concepts généraux non-flous.
On rappelle qu'on exprime une définition D(o) sous la forme $D(o,O_1,..,O_n)$, $O_1,..,O_n$ étant des concepts particuliers si D(o) définit o en utilisant seulement les concepts particuliers $O_1,..,O_n$, des concepts généraux et des concepts définis dans D(o) à partir de $O_1,..,O_n$ (et les concepts primitifs relationnels usuels).
Si O_G est un concept général, la définition D(o) :« o appartient à O_G » signifie « o est identique à l'un des objets pouvant être représenté par O_G. Il est évident que si O_G est un concept non-flou, alors D(o) est non-floue.

On a aussi la définition :
DEFINITION 1.3 :
Si O est un symbole associé à une définition $D(o,O_1,..,O_n)$, O est un concept non-flou si : (i)$O_1,..,O_n$ sont des concepts non-flous.
(ii)Pour tout $(O_{10},..,O_{n0})$ pouvant être représentée par $(O_1,..,O_n)$:
-$D(o,O_{10},..,O_{n0})$ est non-floue.
-Il existe au moins un objet O_0 telle qu'on ait $D(O_0,O_{10},..,O_{n0})$.
On dira alors que O est *un concept non-flou défini en fonction* de $(O_1,..,O_n)$, (ou de $O_1,..,O_n$) et on pourra écrire O sous la forme $O(O_1,..,O_n)$, avec si $(O_{10},..,O_{n0})$ est représenté par $(O_1,..,O_n)$, $O(O_1,..,O_n)$ est le concept associé à $D(o,O_{10},..,O_{n0})$.

Dans le cas général, on a des définitions du type $D(o_1,..,o_i)$, et alors seules les séquences de i objets existants $(O_{10},..,O_{i0})$ peuvent correspondre à $D(o_1,..,o_i)$.
Dans l'article [(1)], on a établi l'existence de concepts non-flous pouvant être identifiés avec **N** , **Q.**

2.THEORIE DE LOGIQUE PLATONICIENNE DES PROPOSITIONS

DEFINITION 2.1 :
a)Une *relation d'ordre de multiplicité* n est un lien qui peut exister ou ne pas exister entre les termes d'une séquence de n objets mathématiques existants $(o_1,…,o_n)$.
b)Si R est une relation d'ordre de multiplicité n et $(o_1,..,o_n)$ est une séquence de n objets :
-La notation $R(o_1,…,o_n)$ signifiera que la relation R existe entre les termes de la séquence.
-La notation $Non(R(o_1,..,o_n))$ signifiera que la relation R n'existe pas entre les termes de la séquence.

AXIOME 2.2 :
On admettra qu'« une relation d'ordre de multiplicité n » est un concept général non-flou.

DEFINITION 2.3 :
a)Une relation R d'ordre de multiplicité n est *cohérente* s'il n'existe pas de séquence $(o_1,..,o_n)$ d'objets existants tels qu'on ait $R(o_1,..,o_n)$ et $Non(R(o_1,..,o_n))$.
b)Une relation R d'ordre de multiplicité n est *binaire* si pour toute séquence $(o_1,..,o_n)$ d'objets existant on a ou bien $R(o_1,..,o_n)$ ou bien $Non(R(o_1,..,o_n))$.

c)Une relation R dôordre de multiplicité n est *non-floue* si elle est binaire et cohérente.

REMARQUE 2.4 :
Une relation peut être dôordre de multiplicité 1. Par exemple le relation R « est identique à », telle que R(o) signifie « o est identique à o » est dôordre de multiplicité 1. Côest aussi le cas si R(o) exprime une relation entre o et lôEMP, ou entre o et des objets mathématiques complètement définis.

DEFINITION 2.5 :
Si R_1,é ,R_k sont k relations dôordre de multiplicité n(1),é ,n(k), on peut définir une *relation composée de* $R_1,..,R_k$ $R_{(R1,..,Rk)}$ dôordre de multiplicité n_c (n_c naturel) telle que :
(i)$R_{(R1,..,Rk)}(o_1,..,o_{nc})$, définie pour toute séquence dôobjets $(o_1,..,o_{nc})$, signifie quôon a k relations entre objets $R_i(o_{i1}$,é ,$o_{in(i)}$), ou pour tout i dans {1,..,k} et tout j dans {1,..,n(i)}, o_{ij} est un terme de la séquence $(o_1,..,o_{nc})$ (Le choix de chaque o_{ij} définissant $R(R_1,.,R_k)$).
(ii)Tout terme de la séquence $(o_1,..,o_{nc})$ est utilisé dans une relation entre objets $R_i(o_{i1}$,é ,$o_{in(i)}$).
(iii)Non($R(R_1,..,R_k)(o_1,..,o_{nc})$ signifie que pour au moins un i de {1,é ,k}, on a Non($R_i(o_{i1},..,o_{in(i)})$.

LEMME 2.6 :
Si $R_1,..,R_k$ sont des relations non-floues dôordre de multiplicité n(1),..,n(k), alors toute relation composée de $R_1,..,R_k$ $R(R_1,..,R_k)$ est non-floue.

Preuve :
On suppose donc $R_1,..,R_k$ sont non-floues, et on conserve les notations de la Définition 2.5.
Si $R(R_1,..,R_k)$ nôest pas binaire, il existe une séquence $(o_1,..,o_{nc})$ telle quôon ait ni $R_{(R1,..,Rk)}(o_1$,é ,$o_{nc})$ ni Non($R_{(R1,..,Rk)}$ $(o_1,..,o_{nc})$.
Le fait quôon nôait pas $R(R_1,..,R_k)(o_1,..,o_{nc})$ signifie dôaprès la Définition 2.5(iii) que pour au moins une séquence $(o_{i1},..,o_{in(i)}$) on nôa pas $R_i(o_{i1},..,o_{in(i)})$.
Le fait quôon nôait pas Non($R_{(R1,..,Rk)}$ $(o_1$,é ,$o_{nc})$ signifie que pour aucun h dans {1,..,k} on a Non($R_h(o_{h1},..,o_{hn(h)}$).
Or ceci entraîne quôon a no $R_i(o_{i1},..,o_{ih(i)}$) ni Non($R_i(o_{i1},..o_{in(i)}$) ce qui est impossible puisque R_i est binaire.
Si $R_{(R1,..,Rk)}$ nôest pas cohérente, il existe donc une séquence dôobjets $(o_1,..,o_{nc})$ telle quôon ait $R_{(R1,..,Rk)}$ $(o_1,..,o_{nc})$ et Non($R_{(R1,..,Rk)}$ $(o_1,..,o_{nc})$).
En procédant comme précédemment, on obtient alors lôexistence dans {1,..,k} dôun i tel quôon ait $R_i(o_{i1},..,o_{in(i)}$) et Non($R_i(o_{i1},..,o_{in(i)}$) ce qui est impossible puisque R_i est cohérente.
Donc on obtient donc que $R_{(R1,..,Rk)}$ est cohérente et binaire et non-floue.
On remarque que même si on avait choisi dans la définition de $R_{(R1,..,Rk)}$ au lieu de (iii) que pour avoir Non($R_{(R1,..,Rk)}$ $(o_1,..,o_{nc})$ il soit nécessaire que pour tout i dans {1,..,k} ou bien $R_i(o_{i1}, ..,o_{in(i)}$) ou bien Non($R_i(o_{i1},..,o_{in(i)}$), on aurait aussi obtenu que $R_{(R1,..,Rk)}$ est non-floue si $R_1,..,R_k$ sont non-floues.

On remarque quôon a défini une relation composée du type « R_1(..)etR_2(é)etR_k(..) ». « et » concept primitif ayant son sens habituel. On aurait pu de la même façon définir des relations composées du type « R_1(é)oué ouR_k(..) », « ou » concept primitif habituel et (Non(R_1))(..). On obtient de la même façon que dans le Lemme 2.6 que si $R_1,..,R_k$ sont non-floues, alors ces relations composées sont non-floues. Il en sera de même pour les relations composées générales, obtenues à lôaide des concepts « ou », « et », « Non ».

DEFINITION 2.7 :
a)R étant une relation dôordre de multiplicité n, on dira quôun concept général non-flou $(c_1,..,c_n)$ représentant des séquences de n objets est une *base de* R, si pour que $o_1,..,o_n$ étant n objets R puisse exister (mais nôexiste pas forcément) entre les termes de $(o_1,.,o_n)$, il soit nécessaire que $(o_1,..,o_n)$ puisse être représenté par $(c_1,..,c_n)$.
b) on considèrera que toute relation R de multiplicité n a une base unique, qui définit partiellement R. Si R peut exister entre les objets de toute séquence dôobjets $(o_1,..,o_n)$, alors on pourra considérer que $(c_1,..,c_n)$ est le concept général associé à $D(o_1,..,o_n)$: « $(o_1,..,o_n)$ appartient au concept « objet mathématique » chaque concepts ci est associé à la définition D(o) :« o est un objet mathématique existant dans lôEMP. »

REMARQUE 2.8 :
Par exemple on peut considérer que la relation R : « est élément de » a pour base (c_1,c_2) où c_1 est associé à « o est un objet mathématique et o est différent de lôEMP » et c_2 est associé à « o est un ensemble ».

DEFINITION 2.9 :

a)On appellera *proposition élémentaire Platoniste stable de type relation* une expression P du type :P :$R(O_1,..,O_n)$ telle que :

(i) R soit une relation non-floue dôordre n.

(ii) O_1,é ,O_n soient des concepts existants non-flous (associés à des définitions).

(iii) $(O_1,..,O_n)$ est un concept existant *inclus* dans la base $(c_1,..,c_n)$ de R, c'est-à-dire toute séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ pouvant être représentée par $(O_1,..,O_n)$ peut être représentée par $(c_1,..,c_n)$.

On dira alors que P *exprime toute les relations entre objets* $R(O_{10},..,O_{n0})$, où $(O_{10},..,O_{n0})$ peut être représentée par $(O_1,..,O_n)$. Le fait que $O_1,..,O_n$ soit non-flous entraîne que $(O_1,..,O_n)$ est non-flou, et donc « peut représenter » a son sens intuitif (voir 1.Introduction).

b)P étant une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation :
(i)On dira que « P est *vraie* » si pour toute séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ pouvant être représentée par $(O_1,..,O_n)$, on a $R(O_{10},..,O_{n0})$.
(ii) On dira que « P est *fausse* » si pour au moins une séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ pouvant être représentée par (O_1,é ,O_n), on a $Non(R(O_{10},..,O_{n0}))$.

c)Si P est une proposition Platoniste stable de type relation, on dira que la *négation* de P,notée Non(P) est une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation, avec « Non(P) vraie » signifie « P fausse » et « Non(P) » fausse signifie « P vraie ».

d)On appellera *proposition élémentaire Platoniste instable* de type relation une expression P du type P :$R(O_1,..,O_n)$ telle que :
(i) :R soit une relation dôordre n.
(ii)$R(O_1,..,O_n)$ ne soit pas une proposition élémentaire Platoniste stable.

REMARQUE 2.10 :
Par exemple si on a une proposition élémentaire Platoniste de type relation P :$R(O_1,..,O_n)$, où O_1 ne peut représente aucun objet, alors O_1 nôest pas un concept existant et donc P est instable. Il en est de même si R est floue ou si lôun des O_i est un concept flou.
On voit que si P est une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation, on peut considérer que Non(P) lôest aussi, car « Non(P) est vraie » exprime tout comme « P est vraie » des relations complètement définies entre des objets de lôEMP.

DEFINITION 2.11 :
a)On définit une *définition* D par la donnée dôun couple (i,n), où i est un naturel non nul et n est supérieur ou égal à i, dôune relation R dôordre de multiplicité n et dôune séquence $(o_{i+1},..,o_n)$ de n-i objets. On dira alors quôune séquence $(o_1,..,o_i)$ *correspond à la définition* D si on a R(o_1,é ,o_n), et quôune séquence dôobjets $(o_1,..,o_i)$ *ne correspond pas à* D si on a $Non(R(o_1,..,o_n))$ et de tout objet qui nôest pas une séquence de i objets mathématiques quôil ne *correspond pas à* D. On appellera le couple (i,n) *lôordre de multiplicité de* D, et on dira que R et la séquence $(o_i,..,o_{i+1})$ *sont associées à* D.
On représentera D par :
$D(o_1,..,o_i)$
R(o_1,é ,$o_{i+1},..o_n$).

b) Avec les notations précédentes, on dira que D *est cohérente* si pour aucune séquence $(o_1,.,o_i)$ on a $(o_1,..,o_i)$ correspond à D et $(o_1,..,o_i)$ ne correspond pas à D.
On dira que D est *binaire* si pour aucune séquence $(o_1,..,o_i)$, on a ni $(o_1,..,o_i)$ correspond à D ni $(o_1,..,o_i)$ ne correspond pas à D.
On dira que D est *non-floue* si D est binaire et cohérente.

On montre facilement le Lemme suivant :

LEMME 2.12 :
Si on a une définition D associée à une relation non-floue R, alors D est non-floue.

On montre facilement ce Lemme, supposant dôabord que D nôest pas binaire ou nôest pas cohérente, et on obtient une séquence $(o_1,..,o_n)$ contredisant que R soit binaire ou cohérente.

DEFINITION 2.13 :

a)On appelle *Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition (partculière)* une expression du type :

P_{Def} :

$D(O_1,..,O_i)$

$R(O_1,…,O_n)$

Telle que :

(i) R soit une relation d'ordre de multiplicité n>i.

(ii) $O_{i+1},..,O_n$ sont des concepts existants non-flous associés à des définitions.

(iii) Si $(c_1,..,c_n)$ est la base de R, $(O_{i+1},…,O_n)$ est un concept existant inclus dans $(c_{i+1},..,c_n)$, c'est à dire toute séquence $(O_{i+10},..,O_{n0})$ peut être représentée par $(c_{i+1},..,c_n)$, où $(c_{i+1},..,c_n)$ peut représenter toutes les séquences $(c_{i+10},…,c_{n0})$ telles qu'il existe une séquence $(c_{10},..,c_{i0})$ telle que $(c_1,..,c_n)$ peut représenter $(c_{10},..,c_{n0})$.

On dira alors que P_{Def} *exprime les définitions* :

$D(O_{10},..,O_{i0})$

$R(O10,…,O_{n0})$

Où $(O_{i+1},..,O_n)$ peut représenter $(O_{i+10},..,O_{n0})$.

b)On appellera *Proposition élémentaire Platoniste instable de type définition (particulière)* une expression du type :

P_{Def} :

$D(O_1,..,O_i)$

$R(O_1,..,O_n)$

Telle que R est une relation d'ordre de multiplicité n et P_{Def} ne soit pas une Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition.

c)On appellera *Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition générale* une expression du type :

P_{DefGen} : $Def_{Gen}(O_G,O_P)$

Avec O_P est un concept particulier non-flou associé à une définition générale. Alors O_G est le concept général pouvant représenter tous les objets pouvant être représenté par O_P.

d) On appellera *Proposition élémentaire Platoniste instable de type définition générale* une expression du type :

P_{DefGen} : $Def_{Gen}(O_G,O_P)$

qui n'est pas une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition générale.

Concernant 2.13a)(iii), on a vu que $(c_1,..,c_n)$ était une base de R impliquait par définition que $(c_1,..,c_n)$ était un concept général non-flou représentant des séquences de n éléments.

On peut donc considérer que $(c_{i+1},..,c_n)$ est le concept général associé à la définition non-floue générale $D(o_{i+1},..,o_n)$:

$(O_1,..,O_n)$ est le concept particulier associé à la définition $D(o_{c1},..,o_{cn})$: « $(o_{c1},..,o_{cn})$ appartient au concept $(c_1,..,c_n)$ »

$(o_{i+1},..,o_n)$ est identique à $(O_{i+1},..,O_n)$.

Dans la définition précédente $O_{i+1},..,O_n$ sont définis en fonction du concept $(O_1,..,O_n)$.

$D(o_{i+1},..,o_n)$ est générale car elle définit $(o_{i+1},..,o_n)$ à partir du concept général $(c_1,.,c_n)$.

Dans la suite, on obtiendra des propriétés de propositions élémentaires Platonistes stables de type définition. Pour établir ces propriétés, on considèrera seulement des propositions élémentaires de type définition particulière, car ces propriétés sont évidentes ou n'ont pas d'intérêt pour les propositions élémentaires de type définition générale.

DEFINITION 2.14 :

Si on a une Proposition élémentaire Platoniste stable de type définition :

P_{Def} :

$D(O_1,..,O_i)$

$R(O_1,..,O_n)$.

a)On dira qu'une séquence $(O_{10},..,O_{i0})$ *correspond à la définition* P_{Def} pour $(O_{i+10},..,O_{n0})$ représenté par $(O_{i+1},..,O_n)$,si on a $R(O_{10},..,O_{n0})$.
On dira que $(O_{10},\ldots,O_{n0})$ *ne correspond pas à la définition* P_{Def} pour $(O_{i+10},..,O_{n0})$ représentée par $(O_{i+1},..,O_n)$,si on a $Non(R(O_{10},..,O_{n0}))$.

b)On dira que P_{Def} est *cohérente* si pour aucune séquence $(O_{i+10},..,O_{n0})$ représentée par $(O_{i+1},.,O_n)$, il existe une séquence $(O_{10},..,O_{i0})$ telle qu'on ait $(O_{10},..,O_{i0})$ correspond à P_{Def} et $(O_{10},..,O_{i0})$ ne correspond pas à P_{Def} pour $(O_{i+10},..,O_{n0})$ représentée par $(O_{i+1},..,O_n)$.

c)On dira que P_{Def} est *binaire* si pour aucune séquence $(O_{i+10},..,O_{n0})$ représentée par $(O_{i+1},..,O_n)$, il n'existe une séquence $(O_{10},..,O_{i0})$ telle qu'on ait ni $(O_{10},..,O_{i0})$ ne correspond pas à P_{Def} ni $(O_{10},..,O_{i0})$ correspond à P_{Def}, pour $(O_{i+10},..,On0)$ représentée par $(O_{i+1},..,O_n)$.

d)On dira que P_{Def} est *non-floue* si on a P_{Def} est binaire et cohérente.

On montre alors sans difficulté, procédant comme pour le Lemme 2.12 le Lemme suivant:

LEMME 2.15 :
Toute proposition élémentaire Platoniste stable de type définition est non-floue.

Pour montrer ce Lemme, on suppose qu'une proposition élémentaire stable Platoniste de type définition n'est pas binaire ou cohérente, et on obtient alors une séquence pour laquelle la relation associée à la définition n'est pas binaire.

DEFINITION 2.16 :
Si on a une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition P_{Def} :$D(O_1,..,O_i)$, $R(O_{i+1},.,O_n)$:
a)(i)On dira que « P_{Def} est *vraie* » si pour toute séquence $(O_{i+10},\ldots,O_{n0})$ pouvant être représentée par $(O_{i+1},..,O_n)$, il existe au moins une séquence $(O_{10},..,O_{i0})$ telle qu'on ait $R(O_{10},..,O_{n0})$.
(ii)Si P_{Def} est vraie, on dira que $(O_1,..,O_i)$ est le *concept associé à la définition* P_{Def} de *paramètres fixes* $O_{i+1},..,O_n$, si pour $(O_{i+10},..,O_{n0})$ représentée par $(O_{i+1},..,O_n)$, (c'est-à-dire $O_{i+10},\ldots,O_{n0}$ représentés simultanément par $O_{i+1},..,O_n$), $(O_1,..,O_i)$ représente l'un des objets $(O_{10},..,O_{i0})$ tel qu'on ait $R(O_{10},\ldots,O_{n0})$. On dira alors que le concept $(O_1,..,O_n)$ est défini *en fonction* du concept $(O_{i+1},..,O_n)$ (ou de $O_1,.,O_n$).
(iii)Si pour $(O_{i+10},\ldots,O_{n0})$ représentée par $(O_{i+1},..,O_n)$ il n'y a qu'une seule séquence $(O_{10},..,O_{i0})$, on dira que $(O_1,..,O_i)$ est défini *uniquement* en fonction de $(O_{i+1},..,O_n)$.

b)On dira que « P_{Def} est *fausse* » s'il existe une séquence $(O_{i+10},..,O_{n0})$ pouvant être représentée par $(O_{i+1},..,O_n)$ telle qu'il n'existe aucune séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ telle qu'on ait $R(O_{10},..,O_{n0})$.

c)De la même façon que pour une proposition élémentaire Platoniste de type relation, on définit et on note $Non(P_{Def})$ la négation d'une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition, avec « $Non(P_{Def})$ est *vraie* » signifie « P_{Def} est fausse » et « $Non(P_{Def})$ est *fausse* » signifie « P_{Def} est vraie ».

d)On dira que toute proposition élémentaire stable de type définition générale est vraie.

DEFINITION 2.17 :
a)On appelle *proposition Platoniste* P une séquence finie $(P_1,..,P_k)$ de propositions élémentaires Platonistes, celles-ci pouvant utiliser des symboles représentant des objets correspondants à des définitions exprimées par des propositions élémentaires Platonistes de type définition parmi les propositions $P_1,..,P_{k..}$ (Et donc des concepts définis par $P_1,.,P_k$.).

b)Si P utilise des symboles représentant des objets associés à des définitions non définis par $P_1,..,P_k$, on dira que ceux-ci sont des *symboles prédéfinis* utilisés par P.

c)On dira qu'une proposition Platoniste P :$(P_1,..,P_k)$ est *stable* si $P_1,..,P_k$ sont toutes stables, que P est *instable* si l'une des propositions $P_1,..,P_k$ est instable, que P est *vraie* si $P_1,..,P_k$ sont toutes vraies et que P est *fausse* si P est stable et qu'une des propositions $P_1,..,P_k$ est fausse.

d)Si P est une proposition Platoniste stable, on définit la *négation* de P, notée Non(P), telle que « Non(P) est *vraie* » signifie « P est fausse », « Non(P) est *fausse* » signifie « P est vraie ». On dira aussi que Non(P) est une proposition Platoniste.

REMARQUE 2.18 :
a)Dôaprès le Lemme 2.15, tout concept existant associé à une définition élémentaire Platoniste stable Platoniste est un concept non-flou, tel quôon lôa défini dans le premier article et en introduction. En effet, sôil est défini en fonction de $(O_{i+1},.,O_n)$, il existe pour tout $(O_{i+10},..,O_{n0})$ représentée par $(O_{i+1},..,O_n)$ et de plus il est défini par une définition non-floue. Ceci est un résultat fondamental.

b)On voit que si $P(P_1,..,P_k)$ est stable, on peut exprimer Non(P), utilisant le concept primitif « ou » par : « Non(P_1) est vraie » ou..ou « Non(P_k) est vraie ».

c)Il est évident que si on a la proposition « Pour tout O_1 concept associé à $D_1(o)$,..,O_n concept associé à $D_n(o)$, $R(O_1,..,O_n)$ » , celle-ci peut être exprimée par la proposition élémentaire Platoniste, R étant une relation dôordre de multiplicité n :
P :$R(O_1,..,O_n)$

Une proposition du type « Pour tout O_{i+1} concept associé à $D_1(o)$, ..,O_n concept associé à $D_n(o)$, il existe des objets O_1, ..,O_i tels quôon ait $R(O_1,..,O_n)$ » ,R étant une relation peut être exprimée par la proposition élémentaire Platoniste de type définition:
P :$D(O_1,.,O_i)$
$R(O_1,..,O_n)$.

LEMME 2.19 :
a)Toute proposition élémentaire Platoniste stable est vraie ou fausse.
b)Aucune proposition élémentaire stable Platoniste nôest vraie et fausse.
c)Toute proposition élémentaire Platoniste est vraie ou nôest pas vraie.
d)Aucune proposition élémentaire Platoniste est vraie et nôest pas vraie.

Preuve :
Supposons quôon ait une proposition élémentaire Platoniste stable de type relation P :$R(O_1,..,O_n)$.

Si P est vraie et fausse, dôaprès la définition de telles propositions, on obtient lôexistence dôune séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ telle quôon ait $R(O(O_{10},..,O_{n0}))$ et Non($R(O_{10},..,O_{n0})$).
ce qui est impossible puisque R est cohérente.
Si on a ni « P est vraie », ni « P est fausse », cela signifie que pour une séquence $(O_{10},.,O_{n0})$ représentée par $(O_1,..,O_n)$ on a NonR$(O_{10},..,O_{n0})$ et que pour aucune séquence $(Oô_{10},..,Oô_{n0})$ représentée par $(O_1,..,O_n)$ on a NonR$(Oô_{10},..,Oô_{n0})$ ce qui contredit NonR$(O_{10},..,O_{n0})$ puisque R est binaire et est donc impossible.
On a donc montré a) et b) pour une proposition Platoniste stable de type relation.
En utilisant quôune définition élémentaire stable Platoniste de type définition est non-floue, ou en procédant comme précédemment, on obtient que a) et b) sont aussi vrais pour une proposition élémentaire Platoniste stable de type définition.
Par définition dôune proposition élémentaire Platoniste instable, toute proposition élémentaire Platoniste est ou bien stable ou bien instable. Toute proposition élémentaire Platoniste instable nôest pas vraie et dôaprès a) toute proposition élémentaire Platoniste stable est ou bien vraie ou bien nôest pas vraie.
On obtient donc c).
Si une proposition élémentaire Platoniste est vraie et nôest pas vraie alors elle est vraie et fausse ou elles est vraie et instable car toute proposition élémentaire Platoniste qui nôest pas vraie est fausse ou instable par définition. Or ceci est impossible dôaprès b) et parce quôune proposition élémentaire Platoniste instable ne peut être vraie.
On a donc obtenu d).

LEMME 2.20 :
a)Toute proposition Platoniste stable est vraie ou fausse.
b)Toute proposition Platoniste stable ne peut être vraie et fausse.
c)Toute proposition Platoniste est vraie ou nôest pas vraie.
d)Aucune proposition Platoniste nôest vraie et nôest pas vraie.

Ce Lemme 2.20 est la conséquence immédiate du Lemme 2.19.

REMARQUE 2.21 :
On remarque quôon pourrait appeler le a) des Lemmes 2.19 et 2.20 *Principes du Tiers exclu* pour les propositions élémentaires Platonistes stables et les propositions Platonistes stables et le c) des Lemmes 19 et Lemme 20 les Principes du tiers exclu pour les Propositions élémentaires Platonistes et les propositions Platonistes.
On pourrait aussi appeler le b) des Lemmes 2.19 et 2.20 *Principes de Non-contradiction* pour les propositions élémentaires Platonistes stables et les propositions Platonistes stables, et le d) des Lemmes 19 et Lemme 20 Principes de non-contradiction pour les propositions élémentaires Platonistes et les propositions Platonistes.
Cependant, ces Principes ne sont plus admis axiomatiquement comme dans les théories mathématiques de logique formelle, mais sont des Lemmes qui sont déduits des axiomes de la TLP. Nous adopterons pour eux les dénominations précédentes.

DEFINITION 2.22 :
(a)On appelle « *ensemble de symboles Platonistes* » un sous-ensemble fini S de $\mathbf{Q}^2$ (dont on a établi lôexistence dans lôarticle [(1)], dont lôensemble vide appelé *symbole «blanc »*. Les éléments de S seront appelés *symboles* de S.
(b)On appellera *symbole composé* de S une séquence finie de symboles de S, qui peut contenir le symbole blanc.

DEFINITION 2.23 :
(a)S étant un ensemble de symboles Platonistes, on appelle *proposition sur* S une séquence finie de symboles de S, commençant et finissant par le symbole blanc.
(b)Si on a une proposition sur S $P(s_1,é\ ,s_n)$, on dira pour toute séquence de k symboles successifs de P $(s_j,..,s_{j+k-1})$ telle que s_{j-1} et s_{j+k} soient les symboles blancs que P utilise le *symbole composé* $(s_j,..,s_{j+k-1})$.

DEFINITION 2.24 :
(a)S étant un ensemble de symboles Platonistes, on appelle *Texte sur* S, une séquence finie de propositions sur S.
b)Si $T(P_1,..,P_n)$ et $Tô(Q_1,..,Q_r)$ sont des textes sur S, on pourra noter $(T,Q_1,..,Q_r)$ ou $(T,Tô)$ le texte $(P_1,.P_n,Q_1,..,Q_r)$.
(c)Si on a un Texte $T(P_1,..,P_n)$, on pourra noter une proposition P_i de ce texte $P_i(T)$, car elle est définie uniquement en fonction de T et de i, avec i naturel et 0<i<n+1.

DEFINITION 2.25 :
On appelle *code Platoniste* C un couple (S,R_C), S étant un concept non-flou pouvant représenter un unique ensemble de symboles Platonistes et R_C étant un concept non-flou représentant une unique relation non-floue dôordre de multiplicité 2 telle que :

(i)-R_C peut exister ou bien entre une proposition P_i dôun texte sur S T :$(P_1,..,P_n)$ et une proposition Platoniste utilisant des symboles de S, notée $Pl_C(P_i)$, (Il peut donc exister plusieurs $Pl_C(P_i)$ possibles. On omettra le symbole « C » de Pl_C sôil nôy a quôun seule code), ou bien entre P_i et lôensemble vide, on écrira alors $Pl_C(P_i)$ est lôensemble vide.
On dira alors que $Pl_C(P_i)$ est une *signification Platoniste de la proposition* P_i du texte T dans le code C. On dira que P_i a une *signification Platoniste vide* si $Pl_C(P_i)$ peut être lôensemble vide.
-$Pl_C(P_i)$ représente toujours au moins un objet mathématique.

On considère donc que, $Pl(P_i)$ utilisant des objets mathématiques comme symboles, on peut la considérer comme pouvant représenter des objet mathématique. De plus, le fait que $P_i(T)$ est un concept non-flou et que R_C est non-floue entraîne que $Pl_C(P_i(T))$ est un concept non-flou.

(ii)C a la *propriété de linéarité*, c'est-à-dire que dans un texte sur S $T(P_1,,.P_n)$, $Pl(P_i)$ ne dépend que de P_i et des $Pl(P_j)$, avec j<i, et suppose que tous ces $Pl(P_j)$ sont vrais, pour j<i.

(iii)Pour que $Pl(P_i)$ soit différent de lôensemble vide, il faut que :

- P_i utilise seulement ou bien des symboles composés définis en fonctions dôautres symboles composés appartenant à des propositions du texte T précédant P_i ou bien des symboles composés appelés *concepts primitifs du code* C, ces concepts primitifs dépendant de R_C.
-Tous les symboles composés utilisés dans le texte T qui ne sont pas des concepts primitifs soient définis dans des définitions élémentaires Platonistes de significations Platonistes $Pl(P_j)$ de propositions de T avec $j<i+1$.
(Dôaprès ce qui précède, un symbole composé $(s_j,..,s_{j+k})$ dôune proposition P_i peut lui-même contenir des symboles composés. Il suffit cependant que seul $(s_j,..,s_{j+k})$ soit associé à une définition pour que P_i puisse lôemployer en pouvant avoir une signification non vide).

(iv)Si on a dans un texte $T(P_1,..,P_n)$ on dira que les significations Platonistes $Pl(P_i)$ dôune proposition P_i de T *sont équivalentes* (dans le code C) si, $Pl_1(P_i)$ et $Pl_2(P_i)$ étant 2 significations Platonistes quelconques de P_i dans T, on a :
-Si $Pl_1(P_i)$ est vide ou une proposition Platoniste instable, alors $Pl_2(P_i)$ est vide ou une proposition Platoniste instable . On dira alors que $P_i(T)$ est *instable*.
-Si $Pl_1(Pi)$ est une proposition Platoniste stable alors $Pl_2(P_i)$ est une proposition Platoniste stable. On dira alors que $P_i(T)$ est *stable.*
-Si $Pl_1(P_i)$ est stable, alors les relations exprimées par « $Pl_1(P_i)$ vraie » (qui sont complètement définies) entraînent les relations exprimées par « $Pl_2(P_i)$ vraie », qui sont elles aussi complètement définies.
Et donc « $Pl_1(P_i)$ vraie » entraîne « $Pl_2(P_i)$ vraie ». Si côest le cas, on dira $P_i(T)$ est *vraie*.

Supposant que les propriétés précédentes sont valides pour tout $Pl_1(P_i)$ et tout $Pl_2(P_i)$, on obtient donc la réciproque. « entraîne » est un concept primitif ayant son sens usuel.

(v)C étant un code Platoniste, on admettra par définition dôun code Platoniste que si on a un Texte $T(P_1,..,P_n)$ et que dans T P_1,é ,P_{i-1} sont vraies dans C, alors les significations Platonistes de P_i dans T sont équivalentes.(On rappelle que $Pl(P_i)$ est obtenu en supposant $Pl(P_1),..,Pl(P_{i-1})$ vraies)

On doit donc supposer que toutes les P_1,é .,P_{i-1} sont vraies pour déterminer si P_i est instable , stable ou vraie car sinon les significations Platonistes $Pl(P_i)$ de P_i ne sont pas forcément équivalentes. Et donc si on écrit que P_i est vraie, stable ou instable dans $(P_1,..,P_n)$, cela signifiera par définition que $P_1,..,P_{i-1}$ sont vraies.

(vi)$T(P_1$,é ,$P_n)$ étant un texte avec $P_1,..,P_{i-1}$ vraies , si P_i est stable, $Pl_1(P_i)$ et $Pl_2(P_i)$ étant 2 significations Platonistes de P_i dans $T(P_1,..,P_n)$ (et donc stables dôaprès (iv)), si P_i emploie un symbole composé $(O_1,..,O_i)$ défini par $Pl_1(P_i)$ en fonction des symboles $O_{i+1},..,O_n$ qui sont des symboles composés utilisés dans le texte $(P_1,..,P_i)$ (et donc dôaprès (iii) associés à des définitions élémentaires Platonistes de certains $Pl(P_j)$ pourj<i+1) , alors $(O_1,..,O_i)$ est aussi défini par $Pl_2(P_i)$ en fonction de $(O_{i+1},..,O_n)$ et de plus, supposant $Pl_1(P_i)$ vraie (et donc dôaprès (iv) $Pl_2(P_i)$ vraie), alors tout objet $(O_{10},..,O_{i0})$ pouvant être représenté par $(O_1$,é ,$O_i)$, $(O_{i+1},..,O_n)$ représentant $(O_{i+10},..,O_{n0})$ dôaprès $Pl_1(P_i)$ peut lôêtre aussi dôaprès $Pl_2(P_i)$.

Le(vi) signifie donc que les définitions de symboles composés utilisés dans le Texte $(P_1,.,P_i)$ sont équivalentes dans $Pl_1(P_i)$ et $Pl_2(P_i)$.

DEFINITION 2.26 :
Soit $C(S,R_C)$ un code Platoniste, et P_i une proposition dôun texte $(P_1,..,P_n)$.
a) Si P_i est stable et nôest pas vraie, on dira que P_i *est fausse*, ce qui équivaut donc à $P_i(T)$ stable et $Pl(P_i(T))$ fausse.
b)On désignera par « *Non* » un symbole composé employé par un code C, tel que, si P_i est une proposition stable dôun Texte $(P_1,..,P_n)$ (Et donc avec $P_1,..,P_{i-1}$ vraies), alors dans le texte $(P_1,..,Non(P_i),..,P_n)$, $Non(P_i)$ est stable et a pour signification Platoniste Non(« $Pl(P_i)$ »).

Dôaprès la définition de la négation dôune proposition Platoniste, on a alors « P_i est vraie » signifie « $Non(P_i)$ est fausse » et « P_i est fausse » signifie « $Non(P_i)$ est vraie ».

Une conséquence du Lemme 2.20 est le Lemme :

LEMME 2.27 :

Si on a une proposition P_i dôun texte $T(P_1,..,P_n)$ dans un code C :
a)Si P_i est stable, P_i est vraie ou fausse.
b)Si P_i est stable, P_i ne peut être vraie et fausse.
c)P_i est vraie ou nôest pas vraie.
d)On ne peut avoir P_i est vraie et P_i nôest pas vraie.

On voit que le Lemme 2.27 peut être considéré comme le Principe du Tiers exclu (avec 2 expressions possibles) et le Principe de Non-contradiction (avec 2 expressions possibles) pour les propositions dans la Théorie Platoniste.(TPL). Cependant, dans cette théorie ce sont des Lemmes justifiés théoriquement et conséquences des Axiomes de la TPL, alors quôils sont admis axiomatiquement dans les théories mathématiques de logique formelle.

DEFINITION 2.28 :
(S,R_C) étant un code Platoniste, on dira quôun texte $T(P_1,..,P_n)$ est vrai (dans C) si pour tout i dans {1,..,n) $P_i(T)$ est vraie.

REMARQUE 2.29 :
a) Une proposition P_i dôun texte T étant un objet mathématique, on peut considérer que « est vraie » utilisé dans « $P_i(T)$ est vraie », exprime une relation entre $P_i(T)$, le code Platoniste C et lôEMP. Cette relation est non-floue dôaprès les Principes du Tiers exclu et de Non-contradiction du Lemme 2.27. Il en est de même dans « est vraie » utilisée dans « $Pl(P_i(T))$ est vraie ».
b) Une conséquence immédiate du Lemme 2.27, est que dans un code C, tout texte T est ou bien vrai ou bien nôest pas vrai, et ne peut pas être vrai et nôêtre pas vrai.

DEFINITION 2.30 :
(S,R_C) étant un code Platoniste C, T étant un texte $(P_1,..,P_n)$, on dira que Q est *une déduction logique (relationnelle)* de $T(P_1$,é .,$P_n)$ si on a dôaprès les relations exprimées par $Pl(P_1),..,Pl(P_n)$: « Q est vraie dans $(P_1,.,P_n,Q)$ », et donc $Pl(P_1),..,Pl(P_n)$ vraies entraînent que Pl(Q) est vraie dans ce texte .

REMARQUE 2.31 :
On voit dôaprès la définition 2.25 (v) que si Q est déduction logique de $T(P_1,..,P_n)$, alors $(P_1,..,P_n)$ doit être un texte vrai, puisque Q est vraie.

Le concept primitif de *déduction logique relationnelle* est important car côest toujours cette sorte de déduction logique qui est utilisé en mathématique.

DEFINITION 2.32
(S,R_C) étant un code Platoniste, et T $(P_1,..,P_n)$ un texte sur S, on dira que $(Q_1,..,Q_k)$ est une démonstration sur T (dans C) si Q_1 est déduction logique de T (Ce qui suppose que T est un texte vrai), et pour tout i dans {2,..,k}, Q_i est déduction logique de $(T,..,Q_{i-1})$.
Dôaprès la définition dôune déduction logique donnée en 2.30, on a alors $(T,Q_1$,é ,$Q_k)$ est un texte vrai.

On peut cependant dans certains cas utiliser dans un texte T des propositions qui ne sont pas vraies:

DEFINITION 2.33
Si T est un texte $(P_1,..,P_n)$, on peut utiliser un concept dans le code C, noté « On suppose », qui a la définition suivante :
(i)Si Q_i est stable dans $(P_1,..,P_{i-1},Q_i)$ (Et donc on a alors $(P_1,..,P_{i-1})$ vrai), alors P_i : « On suppose Q_i » est vraie dans $(P_1,..,P_i)$.
(ii)Il existe (un unique) k>i, telle que P_k est la proposition « On ne suppose plus Q_i » qui est vraie. (On considère le cas où pour i<j<k, P_j nôest pas de la forme P_j : « On suppose Q_j »)
(iii)Pour i<j<k, P_j est telle que si dans le Texte $(P_1$,é ,$Q_i,..,P_j)$, $Q_i,..,P_{j-1}$ sont vraies, alors P_j est vraie dans $(P_1,..,P_j)$. (Et donc « $Pl(P_j)$ vraie » est entraînée par « $Pl(P_1)$ vraie »,.., « $Pl(Q_i)$ vraie »,.., , « $Pl(P_{j-1})$ vraie »)). On dira que P_j est une *déduction logique relationnelle conditionnelle* de $(P_1,..,P_{j-1})$.
(iv)Pour j>k, on ne tient plus compte des propositions $P_i,..,P_k$ pour obtenir $Pl(P_j)$ et déterminer si P_j est vraie, stable ou instable, mais seulement des propositions $P_1,..,P_{i-1},P_{k+1}$,é ,P_{j-1}.

LEMME 2.34 :
Si on a un texte $T(P_1,..,P_n)$ et on a la proposition P_i : « On suppose Q_i », Q_i étant une proposition stable dans $(P_1,..,P_{i-1},Q_i)$, alors avec les notations de la Définition 2.33, si on obtient une déduction logique conditionnelle P_j (donc avec i<j<k) de $(P_1,..,P_{j-1})$ telle quôon ait une signification Platoniste $Pl(P_j)$ qui ne soit pas vraie (et donc fausse ou instable), alors Q_i nôest pas vraie dans $(P_1,..,Q_i)$, et donc $Non(Q_i)$ est vraie dans $(P_1,..,Non(Q_i))$.

Preuve :
Il résulte de la Définition 2.33 dune déduction logique conditionnelle que si Q_i est vraie dans $(P_1,..,Q_i)$, alors $P_{i+1},..,P_{k-1}$ sont vraies dans le Texte $(P_1,é ..,P_{k-1})$ (Car Q_i est vraie entraîne P_{i+1} vraie..qui entraîne P_{k-1} vraie). Et donc si on obtient $Pl(P_j)$ qui nôest pas vraie pour i<j<k, on nôa pas P_j est vraie dans le Texte $(P_1,..,P_k)$, et donc il est impossible que Q_i soit vraie dans $(P_1,..,Q_i)$. Donc dôaprès la Principe du Tiers exclu, Q_i nôest pas vraie dans $(P_1,..,Q_i)$,et donc Q_i étant stable, $Non(Q_i)$ est vraie dans $(P_1,é ,Non(Q_i))$

REMARQUE 2.35 :
a)Si on obtient $Pl(P_j)$ nôest pas vraie avec i<j<k, alors $Non(Q_i)$ peut être considérée comme déduction logique relationnelle de $(P_1,..,P_{i-1})$. On prendra donc en général P_{k+1} :$Non(Q_i)$, et pour h>k+1, les P_h seront déductions logiques relationnelles de $(P_1,..,P_{i-1},P_{k+1},..,P_{h-1})$.
b)On remarque que les significations Platonistes de P_j ne sont plus forcément équivalentes entre elles pour i<j<k. En effet, si Q_i nôest pas vraie, la définition du code Platoniste nôentraîne plus que les P_j doivent avoir des significations Platonistes équivalentes pour i<j<k. Et donc il peut être nécessaire de choisir arbitrairement $Pl(P_{i+1}),..,Pl(P_{k-1})$, P_j étant déduction logique conditionnelle de $P_1,..,P_{j-1}$. Alors on détermine $Pl(P_j)$ en supposant vrais les $Pl(P_{i+1}),..,Pl(P_{j-1})$ choisis arbitrairement. Il suffit que pour un seul choix de $Pl(P_{i+1})$,é , $Pl(P_{j-1})$ on trouve quôune signification Platoniste de $Pl(P_j)$ de P_j nôest pas vraie, pour quôon obtienne que Q_i nôest pas vraie dans $(P_1,.,Q_i)$.
c)On aurait pu aussi définir de façon analogue à la définition 2.33 des preuves par lôabsurde imbriquées, c'est-à-dire par exemple dans un texte $(P_1,..,P_n)$:
P_i : On suppose Q_i, P_{i+1} :On suppose Q_{i+1}, P_{i+2} :On suppose Q_{i+2}, avec
$P_{h(i)}$: On ne suppose plus Q_i, $P_{h(i+1)}$: On ne suppose plus Q_{i+1}, $P_{h(i+2)}$:On ne suppose plus Qi+2 aveci+2< h(i)<h(i+1)<h(i+2).

RELATIONS FONDAMENTALES 2.36 :

On peut obtenir des relations non-floues de la façon suivante :
$(O_1,é ,O_n)$ étant un concept général non-flou (représentant des séquences de n objets), on peut définir dans certains cas pour toute séquence $(O_{10},..,O_{n0})$ pouvant être représentée par $(O_1,..,O_n)$ une proposition Platoniste $P(O_{10},..,O_{n0})$.
On dira alors quôon a une proposition Platoniste $P(O_1,..,O_n)$ définie *en fonction* de $(O_1,..,O_n)$.

On peut alors définir la relation R_P de base $(O_1,..,O_n)$ et telle que $R_P(O_{10},..,O_{n0})$ signifie « $P(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie » et $Non(R_P(O_{10},..,O_{n0})$ signifie « $P(O_{10},..O_{n0})$ nôest pas vraie ».
Dôaprès les Principes de Non-contradiction et du Tiers exclu pour les propositions Platonistes, on obtient facilement que R_P est non-floue.
Si on a 2 propositions $P(O_1,..,O_n)$ et $Q(O_1,..,O_n)$ définies en fonction de $(O_1,..,O_n)$, il est utile de considérer la relation $R_{C(P,Q)}$ de base $(O_1,..,O_n)$ et telle que $R_{C(P,Q)}$ $(O_{10},..,O_{n0})$ signifie « « $Q(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie » ou « $P(O_{10},..,O_{n0})$ nôest pas vraie » » (Ce quôon peut écrire aussi « $P(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie » entraîne « $Q(O_{10},é ,O_{n0})$ est vraie ») et « $NonR_{C(P,Q)}$ $(O_{10},..,O_{n0})$ signifie « $P(O_{10},..,O_{n0})$ est vraie et $Q(O_{10},..,O_{n0})$ nôest pas vraie » .
$R_{C(P,Q)}$ est non-floue comme composée de relations non-floues.
$Oô_1,..,Oô_n$ étant n symboles associés à des définitions, on notera alors $Cond(P(Oô_1,..,Oô_n),Q(Oô_1,..,Oô_n))$ la proposition élémentaire Platoniste $R_{C(P,Q)}$ $(Oô_1,..,Oô_n)$ définie précédemment.
Elle est donc stable si $Oô_1,..,Oô_n$ sont des concepts non-flous inclus dans $O_1,..,O_n$, et elle est vraie si on a pour tout $(Oô_{10},..,Oô_{n0})$ pouvant être représenté par $(Oô_1,..,Oô_n)$ $P(Oô_{10},..,Oô_{n0})$ entraîne $Q(Oô_{10},..,Oô_{n0})$.
On définit aussi $Eq(P(Oô_1,..,Oô_n)$, $Qô(Oô_1,..,Oô_n))$ comme la proposition Platoniste « $Cond(P(Oô_1,..,Oô_n),Q(Oô_1,..,Oô_n))$ et $Cond(Q(Oô_1,..,Oô_n),P(Oô_1,..,Oô_n))$ ».

Dans la définition dôune proposition Platoniste $P(O_{10},..,O_{n0})$ définie pour $O_1,..,O_n$ fixés représentant $O_{10},..,O_{n0}$, on peut utiliser des propositions élémentaires Platonistes du type

Cond(Q(Oô$_1$,..,Oô$_k$),R(Oô$_1$,..,Oô$_k$)), mais dans Q(Oô$_1$,..,Oô$_k$) et R(Oô$_1$,..,Oô$_k$), si on utilise O_1,..,O_n , ceux-ci sont fixés et représentent O_{10},..,O_{n0}.

Plus généralement si Q(O_{GQ1},..,O_{GQn}) est une proposition Platoniste définie en fonction de (O_{GQ1},..,O_{GQn}) et R(O_{GR1},..,O_{GRp}) est une proposition Platoniste définie en fonction de (O_{GR1},..,O_{GRp}), on peut considérer la Proposition élémentaire Platoniste :
Cond(Q(O_{Q1}ô,é ,O_{Qn}ô), R(O_{R1}ô,..,O_{Rp}ô)).

Cette proposition élémentaire Platoniste est stable si O_{Q1}ô,é ,O_{Rp}ô sont des concepts non-flous avec (O_{Q1}ô,é ,O_{Qn}ô) est inclus dans (OG$_{Q1}$,..,O_{GQn}) et (O_{R1}ô,..,O_{Rp}ô) est inclus dans (O_{GR1},..,O_{GRp})
Pour (O_{Q1}ô,é ,O_{Rp}ô) représentant (O_{Q10}ô,..,O_{Rp0}ô), la proposition Platoniste précédente exprime la relation :
« R(O_{R10}ô,é ,O_{Rp0}ô) est vraie » ou « Non(Q(O_{Q10}ô,..,O_{Qn0}ô) est vraie ».

Si on a une définition D(o,O_1,..,O_n), alors on peut considérer la définition élémentaire Platoniste :
Def(A)
R(A,O_1,..,O_n) : A est lôensemble dont les éléments correspondent à la définition D(o,O_1,.,O_n) de paramètres fixes O_1,..,O_n.

Dôaprès le précédent article [(1)], si D(o,O_1,..,O_n) est basique et non-floue, alors A est un concept existant non-flou défini uniquement en fonction de O_1,..,O_n. La définition précédente est alors vraie.

REMARQUE 2.37 :
a)On voit dans cet article une justification théorique à lôAxiome 2.5 fondamental de lôarticle précédent [(1)] permettant dôobtenir quôune définition est non-floue. En effet, on a vu dans lôAxiome 2.5 de cet article quôune relation R_P composée de relations non-floues était une relation non-floue, de même quôune relation définie dans la section précédente en utilisant une proposition P(O_1,.,O_n) définie en fonction de O_1,..,O_n. On a vu aussi dans le Lemme 2.15 que si on utilisait seulement des relations non-floues et des concepts non-flous, on définissait des concepts non-flous. Il en résulte que si on considère seulement les définitions obtenues en utilisant les relations élémentaires non-floues définies en utilisant les concepts primitifs relationnels usuels ainsi que les concepts non-flous comme lôensemble vide, les ensembles, lôEMP, on obtiendra seulement des concepts non-flous (ou des symboles ne représentant aucun objet). Côest aussi le cas si utilisant des définitions non-floues, on obtient lôexistence de concepts ensembles en utilisant lôAxiome 2.14 dôexistence dôensemble de lôarticle précédent [(1)]. On peut aussi pour chaque définition D(o) lôexprimer explicitement en utilisant des relations et des concepts non-flous, et donc prouver théoriquement quôelle est non-floue.

b)On remarque que dôaprès la Définition 2.14, si on a une définition élémentaire Platoniste vraie :
Def(O_1,..,O_i)
R(O_1,..,O_n)

Alors (O_1,..,O_i) est un concept existant non-flou associé à une définition non-floue D(o_1,.,o_i,O_{i+1},..,O_n), qui peut sôécrire R(o_1,..,o_i,O_{i+1},..,O_n).

c)Si on a un concept général non-flou (c_1,é ,c_n), on utilisera souvent la définition élémentaire Platoniste non-floue et vraie:
Def(O_1,..,O_n)
R(O_1,..,O_n): (O_1,..,O_n) appartient au concept général (c_1,..,c_n).

DEFINITION 2.38 :
On dira que O_A est *une fonction-concept définie sur un concept général non-flou* (c_1,..,c_n) si, (O_1,..,O_n) étant définis par :
Def(O_1,..,O_n)
R(O_1,..,O_n) : (O_1,..,O_n) appartient au concept (c_1,..c_n).

On a une définition non-floue du type D_A(o,O_1,..,O_n) telle que O_A soit un concept particulier existant associé à D_A(o,O_1,..,O_n).

(c_1,..,c_n) et D_A(o,O_1,..,O_n) définissent donc la fonction-concept O_A.

Alors si $(O_{10},..,O_{n0})$ peut être représenté par $(c_1,..,c_n)$, $O_A(O_{10},..,O_{n0})$ est le concept associé à $D_A(o,O_1,..,O_n)$. On dira que $O_A(O_{10},$é $,O_{n0})$ est l*ồimage* par la fonction-concept O_A de $(O_{10},..,O_{n0})$.

En général O_A sera défini uniquement en fonction de $(O_1,..,O_n)$.
Pour que O_A soit un concept associé à une définition non-floue $D_A(o,O_1,..,O_n)$, il suffit que O_A soit défini par une proposition Platoniste utilisant seulement les concepts particuliers $O_1,..,O_n$ pour définir O_A, ainsi que des concepts particuliers obtenus à partir de $O_1,..,O_n$ et de concepts généraux.
Par exemple, on peut considérer que *F*, défini sur le concept représentant tous les couples dồensembles, et tel que *F*(A,B) est lồensemble des applications de A dans B est un concept-fonction. De même, (A,B) étant un couple dồensemble, on peut considérer que A×B est lồimage de (A,B) par une fonction-concept.

Nous allons maintenant donner des exemples illustrant les notions précédentes.

EXEMPLE 2.39 :

EXEMPLE 2.39A :
On peut par exemple donner la définition générale associée au concept général « équation dans **R** » :

Def1(F)
R1(F,**R**) :F est élément de *F*(**R**,**R**). (Il est évident que *F*(**R**,**R**) est un concept général).

Def2(O_{eqR}) :
R(O_{eqR},F) : O_{eqR} est identique à (Eq,F). (Ici « Eq » représente un couple de symboles déterminé).

On obtient immédiatement que F et O_{eqR} sont des concepts non-flous. Le concept général « une équation dans **R** » peut représenter tous les objets pouvant être représentés par O_{eqR}. Il est donc non-flou. Il est défini par la proposition élémentaire Platoniste vraie de type définition générale :
Def_{Gen}(une équation dans **R**,O_{eqR}).

EXEMPLE 2.39B :
On peut définir la fonction-concept Sol, sur le concept général « une équation dans R », tel que si E est une équation dans R , Sol(E) est lồensemble des solutions de E.
Si E est défini par :
Def(E)
R(E) : E appartient au concept « une équation dans **R** ».

Alors on définit le concept Sol par :
Def1(F)
R1(F,E): (E est identique à (Eq,F)

Def2(Sol)
R2(Sol,F) : Sol est lồensemble dont les éléments correspondent à la définition D(x,F) : « F(x)=0 ».

On obtient immédiatement que Sol est un concept non-flou associé à une définition du type D(Sol,E), et donc on a bien défini une fonction-concept.

EXEMPLE 2.39C :
On supposera que les concepts « un groupe commutatif » et « un corps commutatif » sont des concepts généraux associés aux définitions usuelles de ces concepts. On peut obtenir une définition Platoniste de ces concepts totalement analogue à la définition Platoniste suivante dồun espace vectoriel.
On définit en effet le concept général « un espace vectoriel » par la Proposition Platoniste suivante $Def_{EV}(O_{ev})$:

$Def_{EV}(O_{ev})$:
$P_{EV}1$:$Def_{ev}1(E,+,K,+_K,\times,.)$
$P_{ev}1(E,+,K,+_K,\times,.)$

$P_{EV}2$:$Def_{ev}2(O_{ev})$
$R_{ev}2(O_{ev},E,+,.)$:O_{ev} est identique à (E,+,.)

On aurait pu remplacer $R_{ev}2(O_{ev},E,+,.)$ par $R_{ev}2(O_{ev},(E,+,K,+_K,\times,.))$. Oev est donc défini uniquement en fonction de (E,+,.), mais aussi de $(E,+,K,+_K,\times,.)$.

$P_{ev}1$ est une proposition Platoniste définie sur toute séquence de 6 objets $(E_0,+_0,K_0,+_{K0},\times_0,._0)$ par :
$P_{ev}1(E_0,+_0,K_0,+_{K0},\times_0,._0)$:

P1:Def1$(E,+,K,+_K,\times,.)$
R1$(E,+,K,+_K,\times,.)$: $(E,+,K,+_K,\times,.)$ est identique à$(E_0,+_0,K_0,+_{K0},\times_0,._0)$

P2 :R2(E,+): (E,+) appartient au concept « un groupe commutatif ».

P3 :R3$(K,+_K,\times)$: $(K,+_K,\times)$ appartient au concept « un corps commutatif ».

P4 :R4(.,K,E) : . est élément de $F(K\times E,E)$.

P5 :Def5(x,y,α,β) :
R5(x,y,α,β,E,K) : (x,y) est élément de E^2 et (α,β) est élément de K^2.

P6 :R6($x,y,\alpha,\beta,+,K,+_K,\times,.$) : ($1_K.x$ est identique à x ($1._K$ est lôélément neutre pour $\times$, qui existe toujours si $(K,+_K,\times)$ est un corps et peut donc être considéré comme lôimage de $(K,+_K,\times)$ par une fonction-concept). et $((\alpha+_K\beta).x$ est identique à $\alpha.x+\beta.x)$ et $\alpha.(\beta.x)$ est identique à $(\alpha\times\beta).x)$ et $(\alpha.(x+y)$ est identique à $(\alpha.x)+(\alpha.y))$

$P_{ev}1(E_0,+_0,K_0,+_{K0},\times_0,._0)$ étant une proposition Platoniste, on peut considérer Pev1 comme une relation non-floue, et donc $P_{EV}1$ définit un concept non-flou. Et donc O_{ev} est un concept non-flou, puisquôon a vu dans le précédent article [(1)] quôil existait au moins un objet correspondant à la définition $Def_{EV}(O_{ev})$. Et donc « un espace vectoriel » est un concept général non-flou.

3.CONSISTANCE,COMPLETUDE ET PARADOXES

A)CONSISTANCE

On sait que toute théorie classique mathématique utilise des Axiome évidents. On peut modéliser mathématiquement une telle théorie par le TLP par les définitions suivantes :

DEFINITION 3.1 :
$C(S,R_C)$ étant un code Platoniste, on appelle *théorie mathématique Platoniste sur* C un couple (C,T_{AX}), où T_{AX} est un texte vrai.

DEFINITION 3.2 :
(C,T_{AX}) étant une théorie mathématique Platoniste, on appelle *démonstration sur* (C,T_{AX}) tout texte sur S $(P_1,é\ ,P_n)$ telle que pour i dans {1,..,n}, P_i soit déduction logique relationnelle de $(T_{AX},P_1,é\ ,P_{i-1})$.

DEFINITION 3.3 :
On dira quôune proposition Platoniste P_{pl0} *appartient à une théorie mathématique Platoniste* (C,T_{AX}) sôil existe une démonstration $(P_1,..,P_n)$ sur (C,T_{AX}) telle que P_{pl0} soit équivalente à lôune des significations Platoniste $Pl(P_n)$ de P_n dans $(T_{AX},..,P_n)$.

Une conséquence immédiate des définitions précédentes est le Lemme suivant de consistance :

LEMME 3.4 : (de consistance) :
a)Pour toute démonstration $(P_1,..,P_n)$ sur une théorie (C,T_{AX}), et pour tout i dans {1,..,n}, on a $Pl_C(P_i)$ est vraie.(Dans $(T_{AX},é\ ,P_n)$.

b)Toute proposition Platoniste P_{pl0} appartenant à une théorie Platoniste est vraie.

c)Toute théorie mathématique Platoniste (C,T_{AX}) *est consistante*, c'est-à-dire quõil est impossible dõobtenir 2 démonstrations $(P_1,..,P_n)$ et $(Q_1,..,Q_r)$ sur (C,T_{AX}) telle que $Pl(Q_r)$ (dans $(T_{AX},.,Q_r)$ soit équivalente à $Non(Pl(P_n))$ (Pour P_n dans $(T_{AX},.,P_n)$).

Preuve :
a) et b) sont la conséquence de la définition dõune déduction logique relationnelle.
Avec les hypothèses du c), on a dõaprès a) que $Pl(Q_r)$ est vraie et $Pl(P_n)$ est vraie (Q_r et P_n dans les textes considérés).
Donc $Non(Pl(P_n))$ est fausse, et donc puisque $Pl(Q_r)$ est équivalente à $Non(Pl(P_n))$, $Pl(Q_n)$ est vraie et fausse, ce qui est impossible dõaprès le Principe de non-contradiction des propositions Platonistes.

REMARQUE 3.5 :
Supposons quõon ait k propositions Platonistes $P_{pl1},..,P_{plk}$ appartenant à une théorie mathématique Platoniste (C,T_{AX}).
Il est souvent utile de considérer un texte $(T_{AX},Q_1,..,Q_k)$, tel que dans ce texte , pour i dans $\{1,..,k\}$, Q_i ait pour signification Platoniste P_{pli}.
Il en résulte quõon a alors dans le texte précédent $Q_1,..,Q_k$ sont des propositions vraies et donc $(T_{AX},Q_1,..,Q_k)$ est un texte vrai. De plus, on peut considérer que Q_i est déduction logique relationnelle de $(T_{AX},..Q_{i-1})$ (Puisque $Pl(Q_i)$ appartient à la théorie (C,T_{AX})).
Il en résulte, que pour toute démonstration $(P_1,..,P_n)$ sur $(T_{AX},Q_1,..,Q_k)$, P_n est vraie dans $(T_{AX},Q_1,..,Q_k,P_1,.,P_n)$ et on peut considérer que $Pl(P_n)$ appartient à la théorie (C,T_{AX}).

B)COMPLETUDE

Pour étudier la complétude dõune théorie (C,T_{AX}), on doit modéliser mathématiquement les déductions logiques relationnelles utilisées dans les théories mathématique classiques. Dans ces théories, on utilise seulement celles qui sont « évidentes ». Il en résulte que seules certaines déductions logiques relationnelles peuvent être utilisées dans les démonstrations des théories mathématiques classiques. On doit les modéliser dans la TLP par des théories mathématiques Platonistes déductives :

DEFINITION 3.6 :
On appelle *théorie mathématique Platoniste déductive* un triplet (C,T_{AX},R_D), où (C,T_{AX}) est une théorie Platoniste et R_D est un concept non-flou représentant une unique relation non-floue dõordre de multiplicité 2, qui peut exister entre une proposition P_n et un texte $(P_1,..,P_{n-1})$, P_n étant toujours une déduction logique relationnelle de $(P_1,..,P_{n-1})$. On dira alors que P_n est déduction logique de $(P_1,..,P_{n-1})$ dans la théorie Platoniste déductive (C,T_{AX},R_D).

On peut modéliser les théories classiques par des théories déductives, où R_D est telle que une déduction logique P_n de $(P_1,..,P_{n-1})$ dans (C,T_{AX},R_D) est toute déduction logique relationnelle « évidente » de $(P_1,..P_{n-1})$.
On peut aussi définir R_D à lõaide de règles de déduction analogues à celles utilisées dans les systèmes formels.

DEFINITION 3.7 :
On définit une *démonstration* sur une théorie Platoniste déductive, et quõune proposition Platoniste *appartient* à une théorie Platoniste déductive de la même façon que pour une théorie Platoniste, en remplaçant « déduction logique relationnelle » par « déduction logique relationnelle dans la théorie déductive (C,T_{AX},R_D) ».

On obtient alors pour une théorie déductive un *Lemme de consistance* totalement analogue au Lemme de consistance obtenu pour une théorie Platoniste.

On peut alors définir la complétude dõune théorie mathématique Platoniste déductive de la façon suivante :

DEFINITION 3.8 :
(C,T_{AX},R_D) étant une théorie Platoniste déductive, on dira quõune proposition Platoniste P_{pl0} est *stable* dans (C,T_{AX},R_D) sõil existe un texte $(P_1,..,P_{n-1})$ de propositions telles que dans ce texte, pour tout i dans $\{1,..,n\}$, P_i est vrai et $Pl(P_i)$ appartient à (C,T_{AX},R_D), et quõon ait une proposition P_n qui soit stable dans $(P_1,..,P_n)$, avec

$Pl(P_n)$ équivalente à P_{pl0}. (C'est-à-dire avec la définition donnée plus haut : $Pl(P_n)$ stable entraîne P_{pl0} stable (et réciproquement) et de plus « $Pl(P_n)$ vraie» entraîne « P_{pl0} vraie » (et réciproquement)).

DEFINITION 3.9 :
(C,T_{AX},R_D) étant une théorie Platoniste déductive, on dira quœelle *est complète* si pour toute proposition stable P_{pl0} dans (C,T_{AX},R_D), ou bien P_{pl0} appartient à (C,T_{AX},R_D) ou bien $Non(P_{pl0})$ appartient à (C,T_{AX},R_D).

A priori, il nœy a pas de raison quœune théorie Platoniste déductive soit complète, puisque seules certaines déductions logiques relationnelles peuvent être utilisées pour obtenir des propositions Platonistes vraies appartenant à la théorie. Nous allons cependant dans la section suivante voir si le Théorème dœincomplétude de Godel obtenu pour les systèmes formels peut sœappliquer aux théories déductives Platonistes.

C)PARADOXES

Il est donc intéressant dœexaminer si le théorème de Godel peut se généraliser aux théories mathématiques Platonistes déductives.
(C,T_{AX},R_D) étant une théorie Platoniste déductive identifiée à une théorie classique, R_D ne permettant que les déductions logiques relationnelles évidentes, on considère la proposition :
P : « P nœst pas démontrable dans (C,T_{AX},R_D) ».
Si on veut obtenir que P est vrai, procédant classiquement comme dans le Théorème de Godel, on suppose que P est fausse, alors P est démontrable, ce qui contredit P et est donc impossible, et donc P est vraie.
Cependant, cette démonstration est inacceptable pour justifier que P est vraie, car elle est une démonstration dans (C,T_{AX},R_D), nœutilisant que des déductions logiques évidentes, et donc si on lœaccepte comme démonstration de P, P est contredite.
Donc P ne peut être fausse ni vraie.
Or ceci sœexplique dans la TLP par le fait que P est instable : Il nœy a pas de propositions Platonistes stables qui soient signification Platoniste de P. Et donc le fait quœon ne puisse démontrer P ne prouve pas lœincomplétude de (C,T_{AX},R_D).
On aurait pu supposer « P nœst pas vraie » au lieu de « P est fausse », mais si on veut alors utiliser la démonstration précédente, il faut que P soit stable, et que Non(P) entraîne que « P est démontrable ». Et donc là encore la démonstration nœst pas valide si P est instable.
Il en est de même pour la proposition P : « P est vraie », le fait quœelle ne soit ni vraie ni fausse se justifie si elle est instable.
On voit donc que le Théorème de Godel ne se généralise pas pour prouver lœincomplétude des théories mathématiques Platonistes déductives.

On peut utilisant une proposition Platoniste définir un système formel classique, et donc montrer quœun système formel peut être identifié à un concept non-flou de la TLP. Dans certains cas on peut identifier un système formel avec une théorie Platonique déductive, et alors on peut lui appliquer le Lemme de consistance. Ainsi pour justifier théoriquement la consistance dœun système formel, il suffit de montrer quœon peut lœidentifier à une théorie Platoniste déductive (C,T_{AX},R_D), C étant un code Platoniste (S,R_C).

4.EXEMPLES

Il est évident quœon peut identifier les symboles usuels aux éléments dœun ensemble de symboles Platonistes. On utilise dans les mathématiques usuels des symboles superposés par exemple pour représenter des quotients de fonction ou des intégrales. Il est évident quœon peut définir un code équivalent nœutilisant que des symboles successifs. De plus, on peut considérer que la syntaxe usuelle définit un code Platoniste.
Pour illustrer ceci, nous allons montrer dans des exemples simples comment expliciter la signification Platoniste de théorèmes classiques. Ceci est à priori possible pour toute proposition utilisée en mathématique. Pour définir les relations et les concepts utilisés dans les propositions Platonistes utilisées, on emploiera des concepts primitifs, ainsi que des concepts prédéfinis, correspondants aux concepts basiques fondamentaux utilisés en mathématique.
P étant une des propositions (théorèmes) dont on va donner une signification Platoniste, on la considère dans un texte (T,P), où T est un texte vrai définissant les concepts basiques usuels en mathématiques, quœon pourra utiliser pour obtenir les concepts prédéfinis de P.

EXEMPLE 4.1 :
Soit par exemple le Théorème de Bezout :
« p et q sont 2 naturels premiers entre eux si et seulement si il existe u,v dans **Z** tels que pu+qv=1 ».

On définit dâabord la proposition Pr(p,q) :« (p,q) sont 2 naturels premiers entre eux », utilisant comme concepts généraux ayant leur signification usuelle « divise » (relation définie entre 2 entiers), **N**, **Z**, « est identique », « est élément de » et « Cond » (définie dans la section 2.36).

La proposition Pr(p,q) entre 2 naturels p et q fixés, est définie par :
Pr(p,q) :
Pr1 :Def1(d)
R1(d,**N**) : « d est élément de **N** ».

Pr2 :
Cond (P2A(d),P2B(d))

Avec P2A(d) :
R2A(d,p,q) :« d divise p et d divise q »
Et P2B(d) :
R2B(d,1) : « d est identique à 1 »

On exprime alors le Théorème de Bezout par, utilisant comme concepts prédéfinis **Z**, +,× (dans **Z**), et la relation « Eq », définie en 2.36 :
P1 :Def1(p,q)
R1(p,q,**N**) : « p est élément de **N** et q est élément de **N** »

P2 :Eq2(PA(p,q),PB(p,q))
Avec
P2A(p,q) :Pr(p,q)
P2B(p,q) :
Def2B(u,v)
R2B(u,v,p,q,**Z**) : « u est élément de **Z** et v est élément de **Z** et uv+pq=1 »

EXEMPLE 4.2 :
Considérons le théorème permettant dôobtenir les solutions dôune équation réelle du second degré. :
« Si on a lôéquation à coefficients réels du second degré ax^2+bx+c, alors, si φ=b2-4ac :
Si φ<0, lôéquation nôa aucune racine réelle, si φ=0, lôéquation a une unique racine réelle -b/2a, et si φ>0 lôéquation a 2 racines réelles r_1=(-b+ã φ)/2a et r_2=(-b-ã φ)/2a. »

On utilise alors les mêmes concepts généraux prédéfinis que dans lôexemple précédent, lôaddition, la multiplication, la division dans **R** et les racines carrées dôun réel positif, ainsi que, F étant une fonction dôun ensemble A dans **R**, lôéquation (Eq,F) définie dans lôexemple 2.39A et la définition de *F*(A,B), ensemble des applications de A dans B, qui on lôa vu peut être considérée comme lôimage de (A,B) par une fonction-concept.

On rappelle que dans lôarticle [(1)], on a donné un Axiome permettant dans certains cas dôobtenir lôexistence dôun ensemble $A(O_1,..,O_n)$ dont les éléments sont les objets correspondant à la définition $D(x,O_1,..,O_n)$. Comme on lôa vu dans la section 2.36,on définit A par la proposition élémentaire Platoniste suivante :

Def(A)
$R(A,O_1,..,O_n)$: « A est lôensemble dont les éléments correspondent à la définition $D(x,O_1,..,O_n)$».
Cette proposition élémentaire Platoniste est stable si $O_1,..,O_n$ sont des concepts non-flous et si $D(x,O_1,..,O_n)$ est une définition non-floue (ce qui est équivalent au fait que le concept X associé à $D(x,O_1,..,O_n)$ est non-flou). Si de plus cette définition est basique, dôaprès lôAxiome dôexistence dôensemble donné dans le précédent article [(1)] , alors la définition Platoniste de A est vraie et A est un concept non-flou défini uniquement en fonction de $(O_1,..,O_n)$.

Le théorème a alors la signification Platoniste :

P1 :Def1(a,b,c)
R1(a,b,c,R) : « (a,b,c) est élément de $\mathbf{R}^3$, et a est différent de 0 ».

P2 :Def2(F)
R2(F,a,b,c) : « F est élément de F(**R**,**R**) et si x est élément de **R**, F(x)=ax^2+bx+c ».
On peut donc aussi représenter F par F(a,b,c), F étant défini uniquement en fonction de (a,b,c) .

P3 :Def3(E)
R3(E,F) : « E est identique à lôéquation dans **R** (Eq,F) »
On peut donc aussi représenter E par E(a,b,c) puisque F est défini uniquement en fonction de (a,b,c) et E est défini uniquement en fonction de F.

P4 :Def4(S)
R4(S,F) : « S est lôensemble de dont les éléments correspondent à la définition D(x,F): F(x)=0 »
On peut donc représenter S par S(a,b,c), puisque S est défini uniquement en fonction de F.

P5 :Def5(φ)
R5(φ,a,b,c) : « φ=b^2-4ac »
On peut donc écrire φ sous la forme φ(a,b,c).

P6 :Cond (P6A(a,b,c),P6B(a,b,c))
Avec P6A(a_B,b_B,c_B) P6B(a_B,b_B,c_B) sont des propositions Platonistes définies en fonction de (a_B,b_B,c_B) pouvant représenter tous les triplets de réels (a,b,c), avec a non nul.

(a,b,c) étant 3 réels, avec a non nul, on a :
P6A(a,b,c) : R6A(a,b,c) : « φ(a,b,c)<0 »

P6B(a,b,c) : « R6B(a,b,c) : « S(a,b,c) est identique à lôensemble vide ».

P7 :Cond (P7A(a,b,c),P7B(a,b,c))

Avec:
P7A(a,b,c) :R7A(a,b,c) : « φ(a,b,c)=0 »

P7B(a,b,c) :R7B(a,b,c) : « S(a,b,c)={-b/2a} »

P8 :Cond (P8A(a,b,c),P8B(a,b,c))

Avec P8A(a,b,c) : R8A(a,b,c): « φ(a,b,c)>0 »

P8B(a,b,c) :

Def8B(i)(r_1,r_2)
R8B(i)(r_1,r_2,a,b,c) : « r_1(a,b,c)=(-b+ã φ(a,b,c))/2a et r_2(a,b,c)=(-b-ã φ(a,b,c)) /2a »

R8B(j)(a,b,c) : « S(a,b,c)={r_1,(a,b,c),r_2(a,b,c)} ».

(On aurait pu aussi définir la fonction-concept «Sol » définie dans lôExemple 2.39B)

EXEMPLE 4.3
Considérons le Théorème de Cailey-Hamilton :
« n étant un naturel et A une matrice de Mn(**C**), X_A(x) étant le polynome caractéristique de A, on a X_A(A)=0 »

On utilise comme concepts généraux prédéfinis **N**, Mn(**C**) (n étant un naturel, Mn(**C**) peut être considérée comme lôimage de n par une fonction-concept ou par un concept général représentant une fonction définie entre 2 ensembles), les éléments Id_{Mn} et 0_{Mn} de Mn(**C**) (qui peuvent être considérés comme les images de n par des fonctions représentées par des concepts généraux), la fonction Det(M), M étant une matrice carrée

complexe (Det peut être considérée comme une fonction-concept ou comme une fonction définie entre 2 ensembles), et P(x) étant un polynome de **C**(x) et M étant une matrice de Mn(**C**), la matrice P(M), (P(M) peut être considéré comme lôimage de (P,M) par une fonction-concept ou par une fonction définie entre 2 ensembles).

Le théorème précédent a alors la signification Platoniste suivante :
P1 : Def1 (n)
R1(n,**N***) : n est un élément de **N*** .

P2 :Def2(A)
R2(A,n): A est un élément de Mn(**C**).

P3 :Def3(X_A)
R3(X_A,A,**C**,n) : « X_A est élément de *F*(**C**, **C**) et $X_A(x)=\det(A-xId_{Mn})$ » (X_A est donc un polynôme à coefficients dans **C**).

P4 :R4(X_A,A,n) : « $X_A(A)=0_{Mn}$ ».

Dans les 3 exemples précédents, on aurait pu obtenir, utilisant lôarticle précédent (1) et les exemples présentés dans la section 2.39, les propositions Platonistes définissant les concepts prédéfinis quôon a utilisés. On aurait aussi pu définir toutes les relations quôon a utilisées par des propositions Platonistes nôutilisant que des relations élémentaires, et donc justifier ainsi quôelles sont des relations non-floues.

EXEMPLE 4.4 :
On démontre facilement lôAxiome du choix dans la TLP :
On rappelle cet Axiome :
« Si on a un ensemble E dont les éléments A sont des ensembles disjoints non vides, alors il existe un ensemble ayant exactement un élément de chaque ensemble. »

Preuve :
Soit E un concept non-flou représentant un unique ensemble dont les éléments sont des ensembles disjoints non vides.
Dôaprès lôAxiome 2.14e) donné dans lôarticle précédent, il existe un ensemble non-flou unique $F=U_E(A)$ dont les éléments sont les éléments des ensembles A appartenant à E. (On définit B(A)=A, défini par une définition non-floue uniquement en fonction de A).
Dôaprès le premier article (1), il existe donc un concept non-flou *F*(E,F) dont les éléments sont toutes les applications de E dans F.
De plus il est évident dôaprès lôhypothèse quôil existe au moins une application de E dans F qui à tout élément A de E donne pour image un élément de A.
Donc il existe au moins un objet correspondant à la définition :
D(o) : « o est élément de *F*(E,F) et pour tout A élément de E, il existe un élément a de A (associé à la définition D(a) : « a est élément de A » tel que (A,a) est élément de o ».

Or dôaprès lôAxiome 2.5 de lôarticle précédent cette définition est non-floue et elle est évidemment basique, donc il existe un ensemble G dont les éléments correspondent à la définition D(o) précédente et on a vu que G est non-vide.
On considère alors la définition de paramètre fixe g, concept associé à « o est élément de g » (C'est-à-dire on le rappelle pour g fixé).
D(o,g) : « o est élément de F et il existe un élément A de E tel que g(A)est identique à o »
Cette définition étant basique et non-floue, dôaprès lôAxiome 2.14 de lôarticle précédent, il existe pour tout g dans G un unique ensemble noté classiquement g(E) dont les éléments correspondent à la définition D(o,g) précédente, g étant fixé.
Il est évident que tout g(E) convient, et quôil en existe au moins un puisque G est non vide.

5.CONCLUSION :

On a donc vu dans cet article que la TLP est une théorie mathématique de logique pouvant interpréter lôensemble des mathématiques classiques . Cette théorie mathématique est entièrement nouvelle et donne une justification théorique au Principe de Non-contradiction et au Principe du Tiers exclu qui sont admis axiomatiquement dans les théories actuelles de logique formelle. On a vu aussi que la TLP donne aussi une justification théorique à la consistance des théories mathématiques classiques. La TLP fait apparaître une analogie remarquable entre la construction de toutes les théories mathématiques classiques ainsi quôentre la construction de toutes les propositions mathématiques et les démonstrations utilisées en mathématiques. La TLP modélise en effet toutes les théories mathématiques classiques ainsi que les propositions et démonstrations quôelles utilisent à lôaide dôun code Platoniste.

Ainsi la TLP apparaît comme une théorie mathématique fondamentale permettant de comprendre le sens profond des mathématiques.

Références :

1.T.Delort, Introduction à la logique Platonicienne- Théorie des ensembles (2010), Extrait du livre Théories dôor, Editions Books on Demand, Paris (2011).
2.Nagel, Newman,Godel, Girard: Le théorème de Godel, Seuil, Paris 1992
3. E.J. Borowski, J.M Borwein, Mathematics, Collins Dictionnary (G.B, 1989)
4. E. Giusti, La naissance des objets mathématiques ,Ellipses, (Paris, 2000)
5. Largeault, Logique Mathematiques, Armand Colin,(Paris ,1992)
6. P.Thiry, Notions de logique,Deboeck Université,(Bruxelles ,1998)
7.Jennifer Bothamley, Dictionary of Theories, (visible ink press,2002)

III.THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES.

Auteur :Thierry DELORT.
Date :23Juin 2010.

1ier article : **THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES-PARTIE I :CONJECTURE FAIBLE DE GOLDBACH.**

2ième article :**THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES-PARTIE II :CONJECTURES FORTES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX.**

TABLES DES MATIERES.

Titre :THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES ï PARTIE I : CONJECTURE FAIBLE DE GOLDBACH
Auteur :Thierry DELORT
Date :29 Novembre 2009

Résumé :

Nous avons présenté en 2 articles (Théorie Aléatoire des Nombres (T.A.N) Parties I et II) une théorie mathématique étudiant le hasard en théorie des nombres, dont lõimportance est fondamentale. Cette théorie fait apparaître que certaines propositions en théorie des nombres ont une explication théorique basée sur le hasard, sans que rien nõindique quõelles aient en plus une démonstration classique, c'est-à-dire utilisant seulement les Axiomes classiques de la théorie des nombres. Au contraire, on peut penser que leur seule explication mathématique théorique est basée sur le hasard.

Nous avons appelé Théorie Aléatoire des Nombres cette théorie très générale permettant dõétudier ces propositions, elle est basée sur un Axiome fondamental, lõAxiome du Hasard, et aussi sur un nouveau type de proposition appelées pseudo-Axiomes aléatoires, propres à cette théorie et admis sans démonstration comme les Axiomes et dont la nécessité est la conséquence de lõAxiome du Hasard. Ainsi, la TAN permet dõobtenir des explications théoriques aléatoires, c'est-à-dire basées sur le hasard, à certaines propositions qui nõont pas de démonstration classique.

Dans ce premier article (T.A.N-Partie I) nous présentons les plus simples Axiomes et pseudo-Axiomes de cette théorie, et nous verrons quõils permettent malgré leur simplicité dõobtenir des explications théoriques basées sur le hasard (appelées *explications aléatoires*) pour la Conjecture faible de Goldbach et pour lõaspect général de la Comète de Goldbach. Dans la seconde partie (T.A.N-Partie II), nous développerons cette théorie pour obtenir des explications aléatoires aux Conjectures fortes de Goldbach et des Nombres premiers jumeaux.

1.INTRODUCTION

La T.A.N (Théorie Aléatoire des Nombres) est une théorie destinée à étudier le hasard en théorie des nombres. Elle est basée sur lõAxiome fondamental suivant :

AXIOME 1 : (Axiome du Hasard)
Des modèles statistiques non-certains expriment les propriétés des nombres.

On dira quõun modèle statistique est *non-certain* si on ne peut démontrer classiquement son existence, c'est-à-dire en utilisant seulement les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres.

On justifie lõAxiome du Hasard dõune part parce quõil nõy a pas de raison pour lesquelles des modèles statistiques nõexisteraient pas en Théorie des Nombres, et sõils existent on devrait sõattendre à ce quõils soient définis en utilisant la Théorie des probabilités. Or dans la Théorie des Nombres classiques, il nõy a aucun exemple dans lequel on utilise la théorie des probabilités pour obtenir une proposition.

Il est évident que si lõAxiome du Hasard est vrai, on ne pourra jamais le démontrer classiquement, comme toute proposition P vraie exprimant quõune proposition Q est vraie mais quõil est impossible de démontrer classiquement Q.(Car il est alors évident que pour démontrer classiquement P on doit démontrer classiquement Q , ce qui est impossible si P est vraie.) Et donc si lõAxiome du Hasard est vrai, on ne peut lõobtenir que de façon axiomatique.

On voit que la conséquence de lõAxiome du Hasard, si on le suppose vrai, est quõil est nécessaire dõutiliser une logique nouvelle, différente de celle utilisant seulement les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres, pour obtenir des modèles non-certains. On appellera *logique du hasard* une telle logique. On verra que la Théorie Aléatoire des Nombres est fondamentale car elle permet de donner des *explications aléatoires*, c'est-à-dire des explications théoriques basées sur le hasard à de très nombreuses conjectures jamais démontrées, et en particuliers aux Conjectures fortes et faibles de Goldbach et des Nombres Premiers Jumeaux.

La T.A.N, basée sur lôAxiome du Hasard précédent, étudie les modèles statistiques non-certains et leurs conséquences. Elle utilise des propositions dôun type nouveau, quôon a appelé pseudo-Axiome aléatoires, qui sont analogues aux Axiomes classiques, c'est-à-dire quôils sont de formulation simple et quôils peuvent être justifiés par des arguments intuitifs évidents ou sont évidents. Ces pseudo-Axiomes aléatoires constituent la logique du hasard en théorie des nombres que nous avons défini précédemment. Ainsi, ils expriment lôexistence, dans des cas particuliers complètement définis, de modèles statistiques exprimant les propriétés des nombres, et définis en utilisant la théorie des probabilités.

De plus une conséquence de lôAxiome du Hasard et de lôexistence de modèles statistiques est quôon obtient des propositions modélisées par des évènements non-certains. On verra quôun pseudo-Axiome de la T.A.N permet dôobtenir dans certains cas des propositions classiques si elles sont modélisées par des évènements de probabilité proche de 1. La T.A.N nôest utile que si on utilise des modèles statistiques non-certains, car il est évident que tout modèle statistique certain ne nécessite pas la T.A.N pour être justifié.

Nous présentons dans ce premier article (T.A.N-PARTIE I :Conjecture faible de Goldbach) une application très simple et fondamentale de cette théorie, on voit quôelle permet de donner une *explication aléatoire*, c'est-à-dire une explication mathématique théorique utilisant seulement les Axiomes et pseudo-Axiomes de la T.A.N, à la Conjecture faible de Goldbach ainsi quôà lôaspect général de la Comète de Goldbach. (On rappelle que la Comète de Goldbach est le graphe de points (k,r(k)) où k est un nombre pair et r(k) est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k. Ce graphe a lôaspect dôune Comète dôoù son nom.).

Ces explications théoriques aléatoires présentées dans ce premier article sont les premières justifications mathématiques théoriques de la Conjecture faible de Goldbach et de lôallure de la Comète de Goldbach.

Il y a déjà eu des approches probabilistes pour expliquer la Conjecture de Goldbach, mais celles-ci étaient purement intuitives, et nôenvisageaient pas ni ne montraient que celle-ci pouvait être expliquée par le hasard dôune façon théorique.

Ainsi, par exemple, Hardy et Littlewood [(6)] ont proposé une formule empirique estimant pour tout nombre pair n le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne n :

$$r(n) \cong 2\Pi_2 \Big(\prod_{p/n, p\geq 3} \frac{p-1}{p-2} \Big) \frac{n}{\ln(n)^2}$$

où Ʉ$_2$å 0,66016

Cette conjecture est obtenue par des arguments purement intuitifs, elle est appelée Conjecture forte (ou « étendue ») de Goldbach et nôa jamais été démontrée tout comme la Conjecture faible de Goldbach (Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers).

Il est important de constater que ce premier article ne consiste pas à obtenir par des arguments intuitifs que le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne n est de lôordre de $n/\ln^2(n)$, ce qui a donc déjà été fait, et de manière beaucoup plus précise par Hardy et Littlewood. En fait, il présente une théorie permettant de montrer que le hasard et ses lois expliquent la validité de nombreuses propositions en théorie des nombres qui nôont pas de démonstration classique. Une telle théorie du hasard et de ses lois en théorie des nombres, basée sur lô Axiome du Hasard et utilisant les pseudo-Axiomes et les définitions de concepts fondamentaux que nous proposons, est totalement nouvelle. En particulier nous définissons les concepts nouveaux et fondamentaux de propositions *modélisées*, ou *modélisées exactement* par des évènements ainsi que de *lois numériques aléatoires*.

En résumé, lôidée que le hasard puisse être à lôorigine et la seule explication existante de la validité de nombreuses propositions en théorie des nombres et lôAxiome du Hasard exprimant cette idée, et la Théorie du hasard dans les nombres proposée basée sur lôAxiome du Hasard, dôun formalisme nouveau et utilisant des pseudo-Axiomes et de nouvelles définitions, et son application à la Conjecture faible de Goldbach, apparaissent comme étant 3 éléments nouveaux et fondamentaux de la théorie des nombres présentée dans cet article. On présente dans ce premier article les plus simples pseudo-Axiomes ainsi que les concepts fondamentaux comme ceux de propositions *modélisées* par des évènements ainsi que celui de *loi numérique aléatoire*, mais la Théorie Aléatoire des Nombres peut être développée. Ceci sera fait dans le second article, T.A.N-Partie II, où nous donnerons notamment une explication aléatoire aux Conjectures fortes Goldbach (Très proche de celle proposée par Hardy et Littlewood) et des nombres premiers jumeaux (Identique à celle proposée par Hardy et Littlewood).

2.THEORIE

Nous allons étudier dans la T.A.N une catégorie de propositions particulière que nous avons appelées *loi numérique aléatoire* .

DEFINITION 2.1 :

Les expressions mathématiques utilisées dans la T.A.N « *est modélisée* » ou « *est modélisée exactement* » ou « *est modélisée presque exactement* » sont utilisées pour représenter certaines propriétés statistiques de propositions.

a)Lôexpression « *est modélisée exactement* » est définie de la façon suivante :
-Si une proposition P *est modélisée exactement* par un évènement Ev dôun Espace probabilisable, alors P se comporte comme si elle avait la probabilité p(Ev) dôêtre vraie.
-Si P1 et P2 sont 2 propositions, et que Ev1 et Ev2 sont 2 évènements dôun même espace probabilisable, et si on a :
P1 *est modélisée exactement par* Ev1.
P2 *est modélisée exactement par* Ev2.
Alors :
La proposition « P1 et P2 » *est modélisée exactement* par lôévènement « Ev1 et Ev2 ».
La proposition « P1 ou P2 » *est modélisée exactement* par lôévènement « Ev1 ou Ev2 »
La proposition Non(P1) *est modélisée exactement* par lôévènement Non(Ev1).
On appellera *propriété de correspondance* la propriété fondamentale précédente.

Lôexpression « *est modélisée presque exactement* » est définie de la façon suivante :
Si une proposition P *est modélisée presque exactement* par un évènement Ev, alors, elle se comporte comme si elle avait la probabilité p(Evô) dôêtre vraie avec p(Evô)å p(Ev).

b)Lôexpression « *est modélisée* » est utilisée pour représenter certaines propriétés statistiques de propositions, mais de façon moins précise que lôexpression « *est modélisée exactement* ». On la définit comme suit :
-Si P1 et P2 sont 2 propositions, et que Ev1 et Ev2 sont 2 évènements dôun même espace probabilisable, et si on a :
P1 *est modélisée par* Ev1 et P2 *est modélisée par* Ev2.
Alors :
La proposition « P1 et P2 » *est modélisée* par lôévènement « Ev1 et Ev2 ».
La proposition « P1 ou P2 » *est modélisée* par lôévènement « Ev1 ou Ev2 »
La proposition Non(P1) *est modélisée* par lôévènement Non(Ev1).
On appellera comme en a) *propriété de correspondance* la propriété fondamentale précédente. Elle est naturelle si on considère que « P *est modélisée par* Ev » signifie que « Ev *représente de façon partielle (définie par la T.A.N) les propriétés statistiques de P* », et « P *est modélisée exactement* par Ev » signifie « Ev *représente de façon complète les propriétés statistiques* de P ».
-De plus si une proposition P *est modélisée par* un évènement Ev, alors dans certains cas dôapplication de certains pseudo-Axiomes aléatoires (pseudo-Axiome 2.3 du modèle exact) de la T.A.N, P *est modélisé exactement* par Ev ou P *est modélisée presque exactement* par Ev.

c)Si f(k) est une fonction dôun sous-ensemble F de **N** dans **R**, on appellera *loi numérique aléatoire sur F* la proposition :
« f(k) *est modélisée par la variable aléatoire* Xf(k) »
où Xf(k) est une variable aléatoire réelle définie ou dont on a défini certaines propriétés.
Par définition, cela signifie que, pour tout k dans F, f(k) est à valeur dans un ensemble fini F(k) de **N**, que Xf(k) est une variable aléatoire à valeur dans F(k) et que pour tout i_k de F(k), la proposition « $f(k)=i_k$ » est modélisée par lôévènement « $Xf(k)=i_k$ ».
d) Si on a une loi numérique aléatoire, on dira quôelle est *exacte* si, avec les notations précédentes du c) on a toujours la proposition « $f(k)=i_k$ » *est modélisée exactement* par lôévènement « $Xf(k)=i_k$ ».

En réalité, pour que la T.A.N soit intéressante, on doit être dans lôun des 2 cas suivants :
-Ou bien F est infini, mais pour tout k appartenant à F, on connaît un nombre fini dôétapes permettant dôobtenir f(k) (utilisant dans la pratique un ordinateur).
-Ou bien F est fini (en général, F aura un seul élément, par exemple F={1}), mais pour au moins un élément k de F on ne connaît pas un nombre fini dôétapes permettant dôobtenir f(k).
Dans lôarticle, on supposera quôon est toujours dans lôun de ces cas.

REMARQUE 2.2 :

La T.A.N permet dôobtenir toutes sortes de propositions classiques, mais elle nôest intéressante que pour obtenir des propositions quôon nôa jamais démontrées classiquement et qui de plus sont illustrées et en accord avec tous les tests réalisés, un test étant un nombre fini dôopérations.

Par exemple, on sait que si, à lôaide dôun ordinateur, on vérifie pour des naturels pairs sôils sont la somme de 2 nombres premiers, on trouvera toujours que côest le cas. Ils vérifient donc la loi générale « Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers », c'est-à-dire la Conjecture de Goldbach qui est donc à la fois illustrée et en accord avec tous les tests réalisés et de plus nôa jamais été démontrée classiquement. Elle fait donc partie des propositions classiques intéressantes à obtenir par la T.AN dôaprès la Remarque 2.2.

Supposons maintenant quôon ait obtenu la loi numérique aléatoire sur F={1} suivante, t(P) étant une fonction à valeur dans F(1)={0,1} :
« t(P)(1) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P)(1) ».
avec p(« Xt(P)(1)= 1 ») >1-10^{-5} .(Pour simplifier, on identifiera parfois t(P)(1) avec t(P), puisque F nôa quôun élément. En général, P sera une proposition et t(P) sera la fonction vérité de P, c'est-à-dire : Si P est vraie, t(P)(1)=1, sinon t(P)(1)=0).

Alors, si « t(P)(1)=1 » est modélisée exactement ou presqu ô exactement par « Xt(P)=1 » (Définition 2.1b) (on dira alors que la loi est exacte ou presquôexacte), « t(P)(1)=1 » se comportera comme si elle avait une probabilité très proche de 1 dôêtre vraie. Si on est dans ce cas, il est évident quôon pourra alors avoir comme conséquence que t(P)(1)=1.
Cette conséquence ne sera pas toujours vraie puisque pour lôobtenir, on a supposé que « t(P)(1)=1 » était modélisée exactement ou presquô exactement par « Xt(P)(1)=1 », ce qui nôest pas nécessairement vrai, et dôautre part, même dans ce cas, « t(P)(1)=1 » se comporte comme un évènement Ev de probabilité très proche de 1, et donc ceci nôentraîne pas forcément que « t(P)(1)=1 ».
Comme la conséquence t(P)(1)=1 nôest pas toujours vraie, on lôobtient par un pseudo-Axiome, le *pseudo-Axiome 2.3 du modèle exact* exposé ci-après, et admis sans démonstration comme un Axiome :
Pseudo Axiome 2.3 (du modèle exact):

> Si P est une proposition classique et si on a une loi numérique aléatoire sur un ensemble F={1} « t(P)(1) est modélisée par Xt(P)(1) » avec t(P)(1) à valeurs dans {0,1} et p(« Xt(P)(1)=1 »)å1, alors lorsque le pseudo Axiome 2.3 du modèle exact est valide pour la loi numérique aléatoire précédente, on obtient t(P)(1)=1.

En fait la TA.N utilise 2 sortes de pseudo Axiomes aléatoires. Le premier pseudo Axiome est le pseudo Axiome du modèle exact. La seconde sorte de pseudo Axiomes permet dôobtenir des modèles statistiques représentant des caractéristiques de fonctions numériques f(k). Ces modèles statistiques permettront dôobtenir des lois numériques aléatoires concernant f(k).
En fait, dans la T.A.N, tous les modèles statistiques sont obtenus par des pseudo Axiomes aléatoires. La raison en est quôil apparaît quôun modèle statistique peut être valide dans un cas et invalide dans un autre cas tout à fait analogue. Donc les propositions permettant de les obtenir ne sont pas toujours valides et sont donc des pseudo Axiomes.
Le second pseudo Axiome aléatoire de la T.A.N introduit le modèle le plus simple : le modèle équiprobable.
Nous allons tout dôabord justifier ce pseudo Axiome aléatoire :
Cette justification intuitive donnée ci-après est assez simple. On peut en fait admettre sans démonstration ce pseudo-Axiome car il est à la fois très simple et évident, de la même façon quôon admet les Axiomes dans les Théories mathématiques.

Supposons quôn ait un ensemble E contenant n éléments, et quôn sache quôun sous-ensemble de E noté A contient un nombre a dôéléments.
On considère la proposition : P : « x est élément de A », et on suppose quôn ignore si P est vraie ou fausse.
On considère alors seulement que x est un élément dôun ensemble contenant a éléments, lui-même sous-ensemble dôun ensemble contenant n éléments.

On peut alors considérer que x est fixé, et que A peut alors être nôimporte quel sous-ensemble de E avec a éléments, avec équiprobabilité pour chaque sous-ensemble. On obtient alors de façon élémentaire que la probabilité que x appartienne à A (et donc que P soit vraie) est égale à a/n.

Si par contre on considère que A est fixé, et que x peut être nôimporte quel élément de E avec équiprobabilité, on obtient aussi de façon élémentaire que la probabilité que x appartienne à A (et donc que P soit vraie) est aussi égale à a/n.

On obtient aussi la même probabilité (que P soit vraie) en considérant que (x,A) peut être avec équiprobabilité nôimporte quel couple dont le premier terme est un élément de E et le second terme est un sous-ensemble de E contenant a éléments.

Les résultats précédents ne sont valables que si, dans la proposition P : « x est un élément de A », on peut considérer seulement que x est un élément dôun ensemble contenant a éléments, lui-même sous-ensemble dôun ensemble contenant n éléments, et quôn ignore de plus si P est vraie ou fausse.

Ainsi dôaprès ce qui précède si on a une proposition de la forme $P(A_k,q_k)$: « x_k est élément de A_k », où A_k est un sous-ensemble fini dô un ensemble q_k, connaissant le nombre dôéléments de A_k et de q_k, si on considère seulement dans la proposition précédente le fait que x_k est un élément dôun ensemble A_k contenant $Card(A_k)$ éléments, lui-même sous-ensemble dôun ensemble fini q_k contenant $Card(q_k)$ éléments, alors si de plus on ignore si $P(A_k,q_k)$ est vraie ou fausse, $P(A_k,q_k)$ se comporte comme si elle avait la probabilité dôêtre vraie de lôévènement $Ev(A_k,q_k)$: « $x_{(k)}$ est élément de A_k » de lôespace probabilisable équiprobable (q_k, $\mathcal{P}(q_k)$,p_{eqq_k}), où p_{eqq_k} représente la probabilité équiprobable sur lôUnivers q_k.

Supposons maintenant quôn ait plusieurs propositions $P(A_{ki})$: « x_k est élément de A_{ki} », où i varie de 1 à n. On note $Ev(A_{ki})$ lôévènement « x(k) est élément de A_{ki} » de lôespace équiprobable q_k.

On obtient alors, i,j appartenant à {1,..,n} :
« « x_k est élément de A_{ki} » et « x_k est élément de A_{kj} » est équivalent à « x_k est élément de A_{ki}ž A_{kj} ».
Dôaprès ce qui précède, si dans la proposition précédente on considère seulement le fait que x_k appartient à un sous-ensemble de q_k contenant $Card(A_{ki}$ž $A_{kj})$ éléments on obtient :
« x_k est élément de A_{ki}ž A_{kj} » se comporte comme si elle avait la probabilité de lôévènement « $x_{(k)}$ est élément de A_{ki}ž A_{kj} » de lôespace équiprobable q_k.
On obtient donc immédiatement que :
« « x_k est élément de A_{ki} » et « x_k est élément de A_{kj} » » se comporte comme si elle avait la probabilité de lô évènement « « $x_{(k)}$ est élément de A_{ki} » et « $x_{(k)}$ est élément de A_{kj} » » de lôespace équiprobable q_k.

En procédant comme précédemment, on obtient de même :
« $P(A_{ki})$ ou $P(A_{kj})$ » se comporte comme si elle avait la probabilité de lôévènement « $Ev(A_{ki})$ ou $Ev(A_{kj})$ ».
Et $Non(P(A_{ki})$ se comporte comme si elle avait la probabilité de lôévènement $Non(Ev(A_{ki})$.

Ce qui précède justifie intuitivement que dans certains cas, avec les notations précédentes on ait $P(A_{ki})$ est modélisée exactement par $Ev(A_{ki})$.

On pourrait donc prendre comme pseudo-Axiome aléatoire, (qui rappelons-le nôest pas toujours valide contrairement aux Axiomes classiques, mais qui doit être simple et dont on doit pouvoir justifier la validité dans les cas où on peut lôappliquer), que si on a une proposition $P(A_{ki})$: « x_k est élément de A_{ki} », (les A_{ki} étant des sous-ensembles de q_k) alors dans le cas dôapplication du pseudo-Axiome aléatoire, $P(A_{ki})$ *est modélisée exactement* par lôévènement $Ev(A_{ki})$ « $x_{(k)}$ est élément de A_{ki} » défini plus haut.

Cependant , comme on lôa vu dans la Définition 2.1, quand une proposition P est modélisée exactement par un évènement Ev, alors P est modélisée par lôévènement Ev. Il en résulte que ce qui précède justifie aussi que $P(A_{ki})$ est modélisée par $Ev(A_{ki})$.

Côest ce quôexprime le pseudo-Axiome du modèle équiprobable suivant.

Ainsi, ce qui précède est la justification intuitive du pseudo Axiome aléatoire suivant, permettant dôobtenir de nombreuses lois numériques aléatoires:

Pseudo Axiome 2.4 :(modèle équiprobable) :
Si on a une proposition P_k : « x_k est élément de A_k », où A_k est un ensemble fini dont on connaît le nombre dôéléments, qui est un sous-ensemble dôun ensemble fini q_k dont on connaît aussi le nombre dôéléments, alors lorsque le *pseudo- Axiome du modèle équiprobable* est valide pour (x_k,A_k,q_k) :
La proposition P_k :« x_k appartient à A_k » *est modélisée par* lôévènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de lôespace probabilisable (q_k ,*P*(q_k),$p_{eqq\,k}$) où pour tout ensemble q la probabilité p_{eqq} désigne la probabilité équiprobable sur q .
On appellera plus simplement lôespace probabilisable (q_k,*P*(q_k),$p_{eqq\,k}$) « espace équiprobable q_k » .

REMARQUE 2.5 :

On a choisi la notation « $x_{(k)} \in A_k$ » plutôt que « A_k » ou « $x \in A_k$ » pour représenter lôévènement modélisant « x_k appartient à A_k » car il est clair que cet évènement est différent dôun évènement modélisant « y_k appartient à A_k » où y_kÍ x_k. De plus cette notation indique que lôévènement représente une propriété statistique de x_k. On pourra néanmoins sôil nôy a pas ambiguïté représenter cet évènement par « A_k ».
Il est clair quôavec ce modèle :

$$p_{eq\Omega k}(x_{(k)} \in A_k) = \frac{Card(A_k)}{Card(\Omega_k)}$$

en général, on appliquera ce pseudo Axiome pour (x_k,A_k,q_k), avec A_k appartenant à un sous-ensemble *A* de *P*(q_k). On écrira alors quôon a supposé que le pseudo Axiome du modèle équiprobable était valide pour (x_k,*A*,q_k). Nous allons montrer quôon peut toujours considérer que *A* est une tribu (sigma-algèbre):

REMARQUE 2.6 :

On rappelle dôaprès la Définition 2.1a) et b) *la propriété de correspondance* :

Si la proposition X est modélisée(ou est modélisée exactement) par EvX et la proposition Y par EvY, EvX et EvY appartenant au même espace probabilisable alors :
-La proposition Non(X) est modélisée (ou est modélisée exactement) par lôévènement Non(EvX).
-La proposition « X et Y » est modélisée (ou est modélisée exactement) par lôévènement « EvX et EvY »
-La proposition « X ou Y » est modélisée (ou est modélisée exactement) par lôévènement « EvX ou EvY »

Il en résulte que si X1,..,Xn sont des propositions modélisées (ou modélisées exactement) par des évènements Ev1,é .Evn dôun même espace probabilisable, alors toute proposition P(X1,..,Xn) construite à partir de X1,é ,Xn, utilisant seulement des « et », des « ou » et des « non » est modélisée (ou est modélisée exactement) par lôévènement P(Ev1,..,Evn) (qui est aussi un évènement de lôespace probabilisable). Ceci est obtenu car « et », « ou », « non » ont les mêmes propriétés utilisés avec des propositions ou utilisés avec des évènements dôun espace probabilisable (commutativité, associativité,distributivitéé .)

On a alors le Théorème :

THEOREME 2.7 :
(i) Si le pseudo Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,q_k) et (x_k,B_k,q_k), alors il est valide pour (x_k,A_kUB_k, q_k) ,pour (x_k, A_kž B_k,q_k) et pour (x_k,q_k/A_k,q_k).
(ii)Lôensemble B_k des sous-ensembles A_k de q_k tels que lô Axiome du modèle équiprobable soit valide pour (x_k,A_k,q_k) est une tribu.

Démonstration :
Si lôAxiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,q_k), alors la proposition « x_k appartient à A_k » est modélisée par lôévènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de lôespace équiprobable q_k.

Dôaprès la propriété de correspondance, Non(« x_k appartient à A_k ») est modélisée par lôévènement Non(« $x_{(k)} \in A_k$ »)
Ceci est équivalent à :
« x_k appartient à q_k/A_k » est modélisée par « $x_{(k)} \in \Omega_k / A_k$ ».
Donc lôAxiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,q_k/A_k,q_k).

Si lôAxiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,q_k) et pour (x_k,B_k,q_k) :
La proposition « x_k appartient à A_k » est modélisée par lôévènement « $x_{(k)} \in A_k$ » de lôespace équiprobable q_k.
La proposition « x_k appartient à B_k » est modélisée par lôévènement « $x_{(k)} \in B_k$ » de lôespace équiprobable q_k.
Donc en utilisant la propriété de correspondance:
La proposition « «x_k appartient à A_k » et « x_k appartient à B_k » » est modélisée par lôévènement « $x_{(k)} \in A_k$ et $x_{(k)} \in B_k$ », ce qui est équivalent à :
La proposition : « x_k appartient à A_kž B_k » est modélisée par lôévènement « $x_{(k)} \in A_k \cap B_k$ » de lôespace équiprobable q_k.
Ce qui signifie exactement que lôAxiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_kž B_k,q_k).

On montre de même quôil est valide pour (x_k,A_kUB_k,q_k).
On a donc montré le Théorème 2.7a), qui entraîne le Théorème 2.7b).

On a donc montré le Théorème 2.7.

On verra que le pseudo Axiome aléatoire du modèle équiprobable a de nombreuses applications dans la T.A.N. Il permet en effet dôobtenir de nombreux modèles statistiques.

En général, si on obtient une loi numérique aléatoire sur un ensemble F :
« f(k) est modélisée par la variable aléatoire Xf(k) »
on ne peut pas en obtenir des propositions classiques. Cependant il semble évident que dans certains cas, on peut considérer que les variables aléatoires Xf(k) sont indépendantes entre elles. Comme ceci nôest pas toujours vrai, on lôobtient par un pseudo-Axiome très simple, le pseudo-Axiome des variables indépendantes :

Pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes :
Si on a une loi numérique aléatoire sur F « f(k) est modélisée par Xf(k) » alors lorsque le pseudo-Axiome des variables indépendantes est valide pour cette loi, on obtient la loi numérique aléatoire « f(k) est modélisée par Xf(k) », où les variables aléatoires sont indépendantes entre elles, définies sur un Univers infini si F est infini.

REMARQUE 2.9 :
En réalité, si on obtient une loi numérique aléatoire « f(k) est modélisée par Xf(k) » en utilisant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable, on peut en général obtenir quôun nombre fini des variables aléatoires Xf(k) sont indépendantes entre elles, par application du modèle équiprobable sur un produit fini dôUnivers associés aux variables aléatoires.
Ceci sôobtient en utilisant que si on a des Univers finis q_1,..,q_n, et des ensembles A_1,..,A_n avec pour tout i A_i est inclus dans q_i, alors :

$$\frac{Card(A_1 \times ... \times A_n)}{Card(\Omega_1 \times ... \times \Omega_n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} Card(A_i)}{\prod_{i=1}^{n} Card(\Omega_i)}$$

Il en résulte que dans lœspace probabilisable équiprobable dœUnivers q_1×é ×q_n, les évènements « $x_{(i)}$ est élément de A_i » sont indépendants entre eux.

En généralisant ceci à un Univers produit infini, on obtient comme dans le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes précédents que les variables aléatoires Xf(k) sont indépendantes sur un Univers infini.

Cette Remarque 2.9 constitue aussi une justification intuitive du pseudo-Axiome précédent des variables indépendantes.

Ainsi la T.A.N présentée dans cet article repose sur le pseudo Axiome2.3 du modèle exact, le pseudo Axiome du modèle équiprobable et le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes.
On utilise ces Axiomes et pseudo Axiomes pour obtenir des lois numériques aléatoires et des propositions classiques. Comme on lœa dit dans la Remarque 2.2, seules les propositions classiques qui nœont jamais été démontrées classiquement mais qui sont illustrées et en accord
avec tous les tests réalisés sont intéressants. On verra notamment quœon peut obtenir la Conjecture de Goldbach et des propositions classiques en accord et illustrées par les tests définissant la Comète de Goldbach obtenue par ordinateur.

DEFINITION 2.10 :

a) On appellera *pseudo-preuve aléatoire* dœune loi numérique aléatoire ou dœune proposition classique son obtention utilisant les Axiomes et pseudo-Axiomes de la T.A.N, ainsi que la Théorie classique des nombres et celle des probabilités.
b) Si une proposition classique a une pseudo-preuve aléatoire et que de plus on nœa jamais pu la démontrer ni sa négation, on dira quœelle a une *explication aléatoire*.

La T.A.N permet de mettre en évidence que le hasard et ses lois expliquent la validité de certaines propositions (propositions, lois numériques aléatoires exacte). Il nœy a aucune raison à priori pour que ces propositions aient en plus une démonstration classique : Il est très possible que certaines de ces propositions aient uniquement le hasard comme origine de leur validité. De plus on peut sœattendre à ce que seules certaines propositions ayant une pseudo-preuve aléatoire soient en accord et illustrées par tous les tests réalisés et donc aient une explication aléatoire intéressante.

REMARQUE 2.11 :
a)On rappelle t(P)=1 si P vraie et t(P)=0 si P fausse. Si P(k) est une proposition dépendant dœun naturel k, on considèrera souvent la fonction t(P(k)) en vue dœobtenir des lois numériques aléatoires.
b) Si une proposition classique a une explication aléatoire (Déf 2.10), alors le fait quœelle concerne une infinité de naturels est nécessaire pour quœon ne puisse la démontrer classiquement ni sa négation. Ceci justifie les 2 types de lois numérique aléatoires considérées, sur un ensemble F fini ou infini.
c) Nous allons montrer que la Conjecture de Goldbach a une explication aléatoire , sa pseudo-preuve aléatoire utilisant les pseudo-Axiomes très simples de la T.A.N présentées dans cet article, et que la T.A.N permet dœobtenir des propositions classiques ayant une explication aléatoire en accord et illustrées par les tests obtenus par ordinateur définissant la Comète de Goldbach.
d) Si on montre quœune proposition classique a une explication aléatoire, on nœa pas prouvé quœelle est vraie mais on a prouvé trois aspects essentiels de la proposition considérée:
- Elle a une explication théorique basée sur le hasard, obtenue à partir dœAxiomes et de pseudo-Axiomes de la T.A.N, qui sont simples et ont un caractère dœévidence tout comme les Axiomes classiques.
- Cette explication théorique basée sur le hasard et ses lois, appelée *explication aléatoire*, montre quœelle peut être la conséquence de modèles statistiques qui sont complètement déterminés et dont on connaît lœorigine de la validité en considérant les pseudo Axiomes utilisés pour les obtenir.
-Cette explication théorique aléatoire est fondamentale puisque la proposition nœa pas de preuve classique, et quœil est tout à fait possible quœelle soit la pure conséquence du hasard et de ses lois et nœait donc pas de preuve classique.

3.APPLICATIONS

Nous allons établir que la Conjecture de Goldbach a une explication aléatoire, ainsi que certaines propositions classiques illustrées par la Comète de Goldbach obtenue par ordinateur. On rappelle que la représentation obtenue par ordinateur du graphe (k,r(k)) où k est un naturel pair inférieur à 100000 et où r(k) est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k donne une forme ayant lô allure dôune comète, appelée Comète de Goldbach.
Ainsi, dôaprès ce qui précède, on va démontrer que la Conjecture de Goldbach a une explication rationnelle basée sur le hasard et mettre en évidence les modèles statistiques dont elle peut être la conséquence, ainsi que ceux expliquant certaines propriétés générales de la Comète de Goldbach.
On rappelle la Conjecture de Goldbach :
« Tout nombre pair est la somme de 2 nombres premiers ».

APPLICATION 3.1 :
k étant un naturel pair, on considère la proposition P(k) :
P(k) :« k est la somme de 2 nombres premiers ».
On définit les ensembles :
E(k) est lôensemble des paires de naturels impairs inférieurs à k.
A(k) est lôensemble de paires de nombres premiers inférieurs à k.
B(k) est lôensemble de paires de naturels impairs dont la somme donne k.
On note a(k),b(k),e(k) le nombre dôéléments de A(k),B(k),E(k).
Dans ce qui suit, i,j,k représenteront toujours des naturels pairs.

On considère la fonction f(k)=t(P(k)).
On pose :
q (k)={(A_k,B_k) , A_k et B_k sous-ensembles de E(k) ayant a(k) et b(k) éléments}
C*(k)={(A_k,B_k) tels que (A_k,B_k) appartient à q (k) et A_k et B_k ont au moins un élément en commun}.
Alors, on remarque que P(k) sôexprime :
P(k) :« (A(k),B(k)) appartient à C*(k) »
Donc, on suppose que le pseudo-Axiome 2.4 du modèle équiprobable est valide pour ((A(k),B(k)),C*(k),q (k)).
On obtient alors :
P(k) est modélisée par lôévènement « C*(k) » (ou « $(A_k, B_k) \in C*(k)$ ») de lôespace équiprobable q (k).

On rappelle la définition formelle dôune loi numérique aléatoire :

DEFINITION 3.1.1 :
Si f(k) est une fonction définie sur un sous-ensemble F de **N** et que pour tout k appartenant à F ,f(k) appartienne à un ensemble fini de réels {$x_{k,1}$,é .,$x_{k,n(k)}$}, alors on aura la loi numérique aléatoire sur F « f(k) est *modélisée par la variable aléatoire* Xf(k) » si pour tout k appartenant à F, Xf(k) soit à valeurs dans {$x_{k,1}$,.. ,$x_{k,n(k)}$ } et la proposition « f(k)=$x_{k,i}$ » soit modélisée par lôévènement « Xf(k)=$x_{k,i}$ », Xf(k) étant pour tout k une variable aléatoire définie ou partiellement définie.

REMARQUE 3.1.2 :
Une application immédiate de cette Définition est le cas où pour k appartenant à un sous-ensemble F de **N**, on a une proposition P(k) qui est modélisée par un évènement Ev(k) dôun espace probabilisable (q $_k$,*B*,p_k), identifié avec q $_k$.
On définit alors la variable aléatoire XtP(k) sur lôespace probabilisable q $_k$, à valeur dans {0,1}, et telle que lôévènement Ev(k) est identifié à lôévènement « XtP(k)=1 ». Alors comme P(k) est équivalente à « t(P(k))=1 », on obtient la loi numérique aléatoire « t(P(k)) est modélisée par la variable aléatoire XtP(k) » avec p(XtP(k)=1)=p_k(Ev(k))

On obtient donc dôaprès cette remarque la loi numérique aléatoire :
H(P(k)) « t(P(k) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(k)) avec :

$$p(Xt(P(k)) = 1) = p_{eq\Omega(k)}(C*(k)) = \frac{Card(C*(k))}{Card(\Omega(k))}$$ ».

On pose alors :

C(k)(0)= {(A_k,B_k) / (A_k,B_k) appartient à Ω(k) et A_k et B_k ont 0 éléments en commun}.
Il est alors évident : C*(k)=Ω(k)/C(k)(0)

En utilisant les formules classiques de dénombrement on obtient :

$$Card(\Omega(k)) = C_{e(k)}^{a(k)} C_{e(k)}^{b(k)}$$

$$Card(C(k)(0)) = C_{e(k)}^{b(k)} C_{e(k)-b(k)}^{a(k)}$$

Donc :

$$p_{eq\Omega(k)}(C(k)(0)) = (\frac{e(k)-b(k)}{e(k)})(\frac{e(k)-b(k)+1}{e(k)-1})...(\frac{e(k)-b(k)-a(k)+1)}{e(k)-a(k)+1})$$

donc :

$$p_{eq\Omega(k)}(C(k)(0)) = (1-\frac{b(k)}{e(k)})(1-\frac{b(k)}{e(k)-1})...(1-\frac{b(k)}{e(k)-a(k)+1})$$

On pose :

p(a(k),b(k),e(k)=$p_{eq\Omega(k)}$(C(k)(0)).

On a donc :

$p_{eq\Omega(k)}$(C*(k))=1-p(a(k),b(k),e(k))

On cherche une approximation de p(a(k),b(k),e(k)).

On a :

$$(1-\frac{b(k)}{e(k)-a(k)+1})^{a(k)} \leq p(a(k),b(k),e(k)) \leq (1-\frac{b(k)}{e(k)})^{a(k)}$$

De plus on peut écrire:

$$(1-\frac{b(k)}{e(k)})^{a(k)} = \exp(a(k)Log(1-\frac{b(k)}{e(k)}))$$

On verra plus loin en calculant les expressions de a(k),b(k),e(k) que pour k tendant vers l'infini on a a(k)/e(k) et b(k)/e(k) tendent vers 0 et a(k)b(k)/e(k) tend vers l'infini.
Dans la suite, la notation ε_i(k) désignera toujours une fonction tendant vers 0 pour k tendant vers l'infini.
En utilisant que si ε_1(k) tend vers 0 pour k tend vers l'infini, alors il existe une fonction ε_2(k) tendant aussi vers 0 pour k tendant vers l'infini telle que Log(1+ε_1(k))=ε_1(k) (1+ε_2(k)), on arrive facilement à :

$$p(a(k),b(k),e(k)) = \exp(-\frac{a(k)b(k)}{e(k)}(1+\varepsilon(k)))$$

où ε(k) est une fonction tendant vers 0 pour k tend vers l'infini.

Calculons maintenant a(k),b(k),e(k).
E(k) est l'ensemble des pairs {x,y} de naturels impairs inférieurs à k. e(k) est le nombre d'éléments de E(k).
Si k est pair, k=2p, il y a p naturels impairs inférieurs à k : {1,…,2p-1}.
Donc e(k)=(p^2-p)/2, car il y a p^2 couples (x,y) mais p^2-p couples (x,y) avec x≠y.
On a donc e(k)=(p^2-p)/2~k^2/8

On emploiera la notation f(k)~g(k) si il existe une fonction ε(k) tendant vers 0 pour k tendant vers l'infini avec f(k)=g(k)(1+ε(k)).

Il nous suffit d'étudier P(k) pour k supérieur à 10000 car utilisant un ordinateur on a déjà montré que P(k) était vrai pour k inférieur à 10000.

A(k) est l'ensemble de paires {x,y} de nombres premiers inférieurs à k, et on sait qu'une estimation du nombre de nombres premiers inférieurs à k est égale à k/Log(k).
Il en résulte que le nombre d'éléments a(k) de A(k) est estimé par:

$$a(k) \approx \frac{1}{2}(\frac{k}{Log(k)})^2$$

Enfin B(k) est lôensemble des paires {x,y} de nombres impairs tels que x+y=k.
On a (si k= 2p) pour x lôensemble des valeurs {1,é ,2p-1}, soit p valeurs, et alors y est complètement déterminé.
Il en résulte quôune estimation de b(k) le nombre dôéléments de B(k) est :
b(k)åp/2=k/4.

On obtient donc :

$$\frac{a(k)b(k)}{e(k)} \approx \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Dôoù :

$$p(a(k),b(k),e(k)) = \exp(-\frac{k}{(Log(k))^2}(1+\varepsilon(k)))$$

Et donc on a obtenu la loi numérique aléatoire, k étant un naturel pair supérieur à 10000 :
H(P(k)) : « t(P(k)) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(k)) avec :

$$p(Xt(P(k))=1) = 1 - p(a(k),b(k),e(k)) = 1 - \exp(-\frac{k}{(Log(k))^2}(1+\varepsilon(k))) \text{ »}$$

On calcule que prenant k =10000, cette probabilité p(a(k),b(k),e(k)) est de lôordre de 10^{-52}.

APPLICATION 3.2 :

On considère la proposition P :
P : « Pour tout naturel k supérieur à 10000, k est la somme de 2 nombres premiers (distincts). »
On cherche à modéliser t(P) par une variable aléatoire Xt(P).

Si on applique le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes à H(P(k)), on obtient une loi numérique aléatoire H_{ind}(P(k)) identique à H(P(k)) mais dans laquelle les variables aléatoires X_{ind}t(P(k)) sont indépendantes. (On rappelle dôaprès la Remarque 2.9 que ceci peut aussi sôobtenir par application du pseudo-Axiome du modèle équiprobable, car on a obtenu H(P(k)) en utilisant ce pseudo-Axiome.)

Pour obtenir des propositions classiques à partir dôune loi numérique aléatoire, on utilise la Propriété de correspondance généralisée suivante :

Propriété de correspondance généralisée 3.2.1 :

A)On a vu dans la Remarque 2.6 (utilisant la propriété de correspondance (Définition 2.1)) que si on avait des modélisations : « Pi est modélisée par lôévènement Evi », Evi évènement dôun Espace probabilisable (q ,*B*,p_q), alors toute proposition P(P1,..,Pn) utilisant un nombre fini de Pi, de « ou » ,de « et »de « non », était modélisée par lôévènement P(Ev1,..,Evn).
On remarque que dans P(Ev1,..,Evn), on peut remplacer « et » par « ž », « ou » par « U », et « non » par « (q /) ».
On généralise cette proposition au cas où on a une infinité de modélisations « Pi est modélisée (ou est modélisée exactement) par Evi », i appartenant à un ensemble infini F et les Evi appartenant au même espace

probabilisable. Alors, par généralisation de la définition de « est modélisée » (ou de « est modélisée exactement ») dans ce cas :

La proposition $\bigcap_{i\in F} Pi$ est modélisée par lõévènement $\bigcap_{i\in F} Evi$.
On a la même propriété remplaçant lõintersection infinie par une union infinie.

Evidemment, $\bigcap_{i\in F} Pi$ signifie que pour tout i dans F, Pi est vraie, et $\bigcup_{i\in F} Pi$ signifie quõau moins une proposition Pi est vraie, pour i dans F.

On appellera la Propriété de correspondance généralisée la propriété précédente.

B) Plus généralement, supposons dans B) quõon ait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F infini « f(k) est modélisée (ou modélisée exactement) par Xf(k) », les variables aléatoires Xf(k) étant définies sur le même espace probabilisable infini, et pour tout k f(k) prenant un nombre fini de valeurs .
Supposons que les naturels 1,é ,n appartiennent à F et quõon ait une proposition P(f(1),é ,f(n)) dont la véracité dépende seulement des valeurs prises par f(1),..,f(n), c'est-à-dire que P(f(1),..,f(n))est vraie ou fausse suivant les valeurs de f(i), i appartenant à {1,..,n}.
Alors P(f(1),..,f(n)) est équivalent à une proposition de la forme :
« « f(1)=a_{11} » eté et « f(n)=a_{1n} » » oué « f(1)=a_{k1} »eté .et « f(n)=a_{kn} » »
Dans cette proposition la valeur des a_{ki} dépendent seulement de la proposition P(f(1),..,f(n)).
Appliquant la Propriété de correspondance (Définition 2.1) ou la Remarque 2.6, on obtient que P(f(1),..,f(n)) est modélisée (ou modélisée exactement) par lõévènement P(Xf(1),é ,Xf(n)).

Ceci est vrai pour un nombre fini de f(i), mais comme en A), on généralise cette Propriété avec une infinité de f(i) :
Si on a une proposition P(($f(i)_F$) (avec donc F infini), dont la véracité dépende seulement de ($f(i))_F$, c'est-à-dire P($f(i))_F$) est vraie ou fausse suivant les valeurs de f(i), i appartenant à F, alors on admettra, en généralisant la propriété précédente établie pour F fini, et donc en généralisant la propriété de correspondance, que P($f(i)_F$) est modélisée (ou est modélisée exactement) par P($Xf(i)_F$).
On appellera aussi Propriété de correspondance généralisée la Propriété précédente, de laquelle on peut obtenir le A), considérant les propositions :
« Pour tout i de F, t(P(i))=1 » ou « Il existe i dans F, tel que t(P(i))=1 ».

Dõaprès la Propriété de correspondance généralisée 3.2.1 précédente, i étant toujours un nombre pair, la proposition $\bigcap_{i=10000}^{\infty} "t(P(i))=1"$ est modélisée par $\bigcap_{i=10000}^{\infty} "X_{ind}t(P(i))=1"$.
La proposition précédente étant équivalente à P et les variables X_{ind}t(P(i)) étant indépendantes, on a donc obtenu la loi numérique aléatoire H(P) :
H(P) : « t(P) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P) avec :

$$p(Xt(P)=1)=\lim_{k\to\infty}\prod_{i=10000}^{k}(1-\exp(-\frac{k}{(Log(k))^2}(1+\varepsilon(k))))$$ »

En exprimant lõexpression précédente en somme de logarithmes et en utilisant Log(1+Ů(x))å Ů(x), remarquant quõon a des termes positifs et décroissant on peut approximer lõexpression précédente par une intégrale. On obtient alors quõelle est de lõordre ou inférieure à 10^{-39}.

On a donc obtenu la loi numérique aléatoire :
H(P) : « t(P) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P) avec :
p(Xt(P)=1) supérieur ou de lõordre de $1\text{-}10^{-39}$ »
En utilisant alors le pseudo Axiome 2.3 du modèle exact, on obtient t(P)=1, c'est-à-dire P qui est exactement la Conjecture de Goldbach. On rappelle que la Conjecture de Goldbach est une proposition illustrée et en accord avec tous les tests réalisés. Puisque P nõa jamais été contredite ni prouvée classiquement, on obtient donc que P a une explication aléatoire. (Déf 2.10)

On a donc montré :

a) La conjecture de Goldbach a une explication théorique basée sur le hasard.
b) Elle peut en effet être déduite de modèles statistiques complètement déterminés et dont on connaît lôrigine de la validité (Les pseudo-Axiomes utilisés).
c) Cette explication théorique aléatoire est fondamentale puisque la Conjecture de Goldbach nôa jamais été prouvée classiquement, il est donc très possible quôelle soit seulement la conséquence du hasard et nôait donc pas de preuve classique.

Donner une explication aléatoire à la Conjecture de Goldbach était lôobjectif principal de cet article. Dans ce qui suit, on va donner une explication aléatoire à dôautres propositions liées à la Conjecture de Goldbach, notamment des propositions générales prévoyant que la Comète de Goldbach est une Comète et donnant la définition mathématique des courbes constituant cette Comète. Les propositions ayant une explication aléatoire quôon va obtenir dans les 2 applications suivantes ne sont pas très précises pour décrire les propriétés générales de la Comète de Goldbach. Cependant, il est très possible quôen affinant la T.A.N présentée dans cet article on obtienne des propositions beaucoup plus précises. Elles sont aussi les seules obtenues à ce jour exprimant des propriétés générales de la Comète de Goldbach qui soient justifiées et expliquées par une théorie mathématique. De plus, les 2 applications suivantes montrent comment utiliser la T.A.N pour obtenir dôautres types de propositions classiques ou de lois numériques aléatoires.

APPLICATION 3.3.

Nous allons maintenant obtenir des lois numériques aléatoires permettant de prédire certaines propriétés générales de la Comète de Goldbach.
On rappelle que r(k) est le nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k.
On conservera les notations des 2 applications précédentes. Soit k un naturel pair et h un naturel inférieur à inf(a(k),b(k)).
Considérons la proposition:
Pr(k)(h) : « r(k)=h ».
Si on définit lôensemble C(k)(h) par :
C(k)(h) = {(A_i,B_i) / (A_i,B_i) appartiennent à q (i) et A_i et B_i ont h éléments en commun}
Alors il est clair que Pr(k)(h) sôécrit :
Pr(k)(h) : « (A(k),B(k)) appartient à C(k)(h) ».

Si alors on considère que le pseudo Axiome du modèle équiprobable est valide pour ((A(k),B(k)),C(k)(h),q (k)), alors on obtient :
Pr(k)(h) est modélisée par lôévènement C(k)(h) de lôespace équiprobable q (k).
Ce qui sôexprime aussi par la loi numérique aléatoire :
HPr(k) : La fonction r(k) est modélisée par la variable aléatoire Xr(k) avec :
p(Xr(k)=h)=$p_{eqq(k)}$ (C(k)(h)) »

On obtient facilement en utilisant les formules de dénombrement :

$$Card(C(k)(h)) = C_{e(k)}^{a(k)} C_{a(k)}^{h} C_{e(k)-a(k)}^{b(k)-h}$$

Donc :

$$p_{eq\Omega(i)}(C(k)(h)) = \frac{C_{a(k)}^{h} C_{e(k)-a(k)}^{b(k)-h}}{C_{e(k)}^{b(k)}}$$

En appliquant le pseudo-Axiome 2.8 des variables indépendantes, on obtient une loi dôexpression identique avec HPr(k), notée Hr_{ind}, mais dans lesquelles les variables aléatoires $Xr_{ind}(k)$ sont indépendantes.

Hr_{ind} : « Pour k naturel pair supérieur à 1000, r(k) est modélisé par la variable aléatoire $Xr_{ind}(k)$, où les $Xr_{ind}(k)$ sont des variables aléatoires indépendantes (Sur un Univers infini) ayant les mêmes propriétés numériques que les Xr(k). »

On cherche à obtenir par la TAN une estimation de r(k). Considérons le cas général où lôon recherche une estimation par la TAN dôune fonction f(k) définie sur un sous-ensemble infini de **N** :

ETUDE THEORIQUE DôUNE FONCTION PAR LA TAN 3.3.1 :
On ne considèrera que 2 cas :
Dans le premier cas, on obtient par la TAN en utilisant un modèle statistique M1 une fonction F(k), telle que la proposition suivante P1 a une pseudo-preuve aléatoire :

P1 : « $\lim_{k\to\infty}(\frac{f(k)}{F(k)})=1$ » .

Dans le 2^{ième} cas, on obtient par la TAN, en utilisant un modèle statistique M2 une fonction F(k), deux fonctions Ů$_1$(k) et Ů$_2$(k) positives et tendant vers 0 telle que, posant I(k)=[1-Ů$_1$(k),1+Ů$_2$(k)] , une proposition du type de la proposition suivante P2 a une pseudo-preuve aléatoire :

P2 : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :
$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t("\frac{f(i)}{F(i)}\in I(i)")\geq p$ (En général on ne connaît pas explicitement F(n), mais on a F(n) équivalente à une fonction F_A(n) connue)»

Dans la proposition précédente, p est un rationnel proche de 1 (p=0.98 par exemple). On a supposé que f(k) était définie sur **N**. Dans le cas général f(k) est définie sur un sous-ensemble infini F de **N**, et la sommation ne porte que sur les éléments de F. On divise alors par le nombre dôéléments de F inférieurs à n. P2 exprime quôil existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N la proportion des naturels k appartenant à F et inférieurs à n tels que f(k)/F(k) appartiennent à I(k) est supérieure à p.
Dans certains cas P1 et P2 sont illustrées par des tests et donc on obtient une estimation de r(k) donnée par ces propositions. Pour voir si P1 ou P2 sont illustrées par des tests, on trace les points (k,f(k)/F(k)) (ou (k,f(k)/F_A(k))pour k aussi grand que possible. Si il apparaît que ces points (pour P1), ou un pourcentage proche de 1 de ces points (pour P2) tendent vers la droite dôéquation y=1, alors P1 ou P2 sont illustrées par les tests. Dans certains cas, P1 ou P2 tout en étant vraies ne sont pas illustrées par les tests. Côest le cas quand on ne peut pas réaliser les tests (C'est-à-dire calculer f(k)/F(k) ou f(k)/F_A(k)) pour k assez grand, à cause de limites comme la puissance maximale des ordinateurs. Si il apparaît que les points (k,f(k)/F(k)) (ou (k,F_A(k)) sont proches de 1 et sôen rapprochent quand k augmente, on pourra considérer que P1 ou P2 sont *partiellement* illustrées par les tests, même si ceux-ci ne font pas apparaître que les points (k,f(k)/F(k)) (ou (k,F_A(k)) tendent vers la droite dôéquation y=1. Dans ces cas, on doit essayer dôobtenir une fonction F_B(k) plus précise que F(k) ou F_A(k) pour estimer f(k).
Cependant, P1 et P2 ne sont vraies que dans certains cas où les modèles M1 ou M2 permettant dôobtenir P1 ou P2 sont valides avec une très bonne approximation. Un cas beaucoup plus général est le cas où M1 et M2, tout en étant valides avec une bonne approximation, ne le sont pas avec une qualité suffisante pour que les propositions du type P1 ou P2 quôils entraînent soient vraies. On remarque que toute proposition Q1 ou Q2 entraînée par P1 ou P2 a une pseudo-preuve aléatoire dôaprès la Définition 2.10. Cependant, pour que de telles propositions Q1 ou Q2 soient intéressantes, il faut dôune part quôelles soient illustrées par des tests, mais aussi quôelles illustrent la validité avec la meilleure qualité possible des modèles statistiques M1 ou M2 permettant dôobtenir P1 ou P2. Ceci est vrai si les propositions Q1 ou Q2 sont les plus proches possible de P1 ou P2 qui correspondent à la meilleure qualité des modèles M1 ou M2. Ce sera le cas si les paramètres de Q1 ou Q2 sont le plus proche possible des paramètres de P1 ou P2.
Ainsi, dans le premier cas on considèrera que seules les propositions du type Q1 suivant ont une pseudo-preuve aléatoire intéressante :

$Q1_A$: « Il existe un réel L>0 tel que $\lim_{k\to\infty}(\frac{f(k)}{F(k)})=L$ »

On pourra aussi considérer la proposition $Q1_B$ plus générale que $Q1_A$:
$Q1_B$: « Il existe 2 réels strictement positifs α et β et un naturel N tel que pour tout n supérieur à N, f(n)/F(n) appartienne à [α,β] »

Dans le 2^{ième} cas on considèrera que seules les propositions du type Q2 suivantes ont une pseud-preuve aléatoire intéressante :
Q2 : « Il existe 2 réels strictement positifs Ŭet б, et il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t("\frac{f(i)}{F_A(i)}\in[\alpha,\beta]")\geq p-0.01$$

Il est évident que si de telles propositions sont illustrées par des tests, elles illustrent la validité avec une bonne approximation des modèles M1 ou M2, car elles sont très proches des propositions P1 ou P2 (à cause du paramètre qui est la fonction F(k)).
On peut aussi considérer que plus L est proche de 1, meilleure est la qualité du modèle M1, et plus Ŭ et б sont proches de 1, meilleur est la qualité du modèle M2. Pour exprimer ceci, on peut dans la proposition $Q1_A$ borner (au sens large) par un réel B1 la distance |L-1|, et dans la proposition Q2 ou Q1B borner par 2 réels B1 et B2 les distances |б-1|+|Ŭ-1| et |б-Ŭ|. On obtient alors les propositions notées $Q1_A$(B1) ,Q2(B1,B2) et $Q1_B$(B1,B2).
Il est évident que si $Q1_A$(B1) ou Q2(B1,B2) sont illustrées par des tests, plus B1 et B2 sont proches de 0, meilleure est illustrée la qualité des modèles M1 ou M2. En effet, P1 est exactement $Q1_A$(0) et P2 entraîne que Q2(B1,B2) est vraie pour tous réels B1,B2 strictement supérieurs à 0.
Si on obtient que de telles propositions du type Q1 ou Q2 précédent sont illustrées par des tests on peut sôattendre à ce quôen améliorant le modèle statistique permettant de les obtenir, on puisse obtenir des propositions beaucoup plus précises du type P1 ou P2 pour estimer la fonction f(k). Cela sera le cas dans lôétude de la fonction r(k).
Il est clair quôil peut exister à priori dôautres propositions que celles du type Q1 ou Q2 précédentes ayant une pseudo-preuve aléatoire et donnant une estimation dôune fonction f(k). Mais dans cet article, on ne considèrera que les propositions simples de ce type.

Appliquons lôEtude théorique précédente 3.3.1 à le fonction r(k), utilisant la loi numérique aléatoire Hr_{ind}.
On définit, pour k supérieur à 1000 lôintervalle de confiance minimum à 99% J(k)=[m(k)-Ů$_G$(k),m(k)+Ů$_G$(k)] de Xr_{ind}(k). m(k) étant lôespérance de Xr_{ind}(k), Ů$_G$(k) étant une fonction positive. J(k) est un intervalle de confiance minimum à 99% de Xr_{ind}(k) signifie :
p(« Xr_{ind}(k) est élément de J(k) »Ó0.99 avec Ů$_G$(k) minimal (En fait dans ce qui suit, il suffit de supposer que Ů$_G$(k) tend vers 0).
On obtient dôaprès la théorie des probabilités, m(k)=a(k)b(k)/e(k) (a(k), b(k),e(k) ayant été précédemment définies). Donc m(k)å R(k)=k/(Log(k))^2.
On définit alors la variable aléatoire :
Y(k)=t(« Xr_{ind}(k) est élément de J(k) »).
Il est évident que les Y(k) sont indépendantes (puisque les Xr_{ind}(k) le sont) et de plus, les Y(k)sont des lois binaires (prenant les valeurs 1 ou 0), et dôaprès la définition des intervalles J(k) :p(« Y(k)=1 »)Ó0.99.
On rappelle la Loi Forte des Grands Nombres de Khintchine (5) :
Si $(X_i)_{\mathbf{N}}$ sont des variables aléatoires indépendantes, X_i ayant une espérance m_i et une variance ů$_i^2$, les variances étant uniformément variées (ů$_i^2$<c pour tout i), alors $\left|\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}(X_i-m_i)\right|$ converge presque sûrement vers 0 (La probabilité de lôévènement « $\left|\frac{1}{n}\times\sum_{i=1}^{n}(X_i-m_i)\right|$ tend vers 0 » est égale à 1.
Appliquant la Loi de Khintchine précédente, on obtient que la probabilité de lôévènement suivant Ev(Y) est égale à 1 :
Ev(Y) : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$(\sum_{i=1000}^{n}\frac{Y(i)}{(n-1000)/2+1})\geq 0.98 \text{ (i naturel pair)»}$$

Or dôaprès la Propriété de correspondance généralisée 3.2.1, la proposition suivante P(Y) est modélisée par lôévènement Ev(Y), et donc a une pseudo-preuve aléatoire:
P(Y) : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$(\sum_{i=1000}^{n}\frac{t("r(i)\in J(i)")}{(n-1000)/2+1})\geq 0.98 \text{ »}$$

De plus on a « r(k) est élément de J(k) » est équivalent à « r(k)/m(k) est élément de [1-Ů$_G$(k))/m(k)), 1+Ů$_G$(k))/m(k)] », ce qui est équivalent à ce quôon ait, Ů(k) étant la fonction Ů$_G$(k)/m(k), et I(k) étant

lôintervalle [1-Ů(k),1+Ů(k)] : « r(k)/m(k) est élément de I(k) ». On admettra $\varepsilon(k)=\varepsilon_G(k)/m(k)$ tend vers 0, ce qui est un pur problème de probabilité.
On a donc obtenu que la proposition suivante $P2_{eq}$(r(k) a une pseudo-preuve aléatoire :
$P2_{eq}$(r(k)): « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :
$(\sum_{i=1000}^{n} \frac{1}{(n-1000)/2+1} \times t(" \frac{r(i)}{m(i)} \in I(i)") \geq 0.98$, avec m(i)≈i/(Log(i))^2»

La proposition $P2_{eq}$(r(k)) précédente est exactement du type de celle du 2^{ième} cas considéré dans lôEtude dôune fonction par la TAN 3.3.1. Dôaprès lôaspect de la Comète de Goldbach, elle nôest pas illustrée par des tests (Sinon le graphe montrerait que les points (k,r(k)) se rapprochent tangentiellement de la courbe (k,R(k)). Ceci nous permet de conclure que le modèle équiprobable utilisé pour obtenir Xr_{ind}(k) nôest pas exact.
Cependant dôaprès lôaspect de la Comète de Goldbach, la proposition $Q2_{eq}$(r(k)) suivante est illustrée par des tests :
$Q2_{eq}$(r(k) : ñIl existe 2 réels α, β strictement positifs et il existe N tel que pour tout n supérieur à N :
$(\sum_{i=1000}^{n} \frac{1}{(n-1000)/2+1} \times t(" \frac{r(i)}{R(i)} \in [\alpha,\beta]") \geq 0.97$, avec R(i)=i/(Log(i))^2»

Or on a vu dans le chapître 3.3.1 quôune telle proposition avait une pseudo-preuve aléatoire et était intéressante. Elle apparaît comme étant vérifiée pour Ů=0.7 et ß=2. On voit que Ů et ß sont de lôordre de lôunité ce qui on lôa vu illustre la bonne qualité du modèle équiprobable considéré. On obtient donc que la proposition $Q2_{eq}$(r(k),B1,B2) définie en 3.3.1 prenant B1=B2=1.3 a une pseudo-preuve aléatoire intéressante.
Remarquant que la proposition précédente entraîne que le graphe (k,r(k)) a lôaspect dôune Comète, on voit donc que le modèle équiprobable considéré justifie lôaspect de la Comète de Goldbach, donnant la forme des équations des courbes r_{min}(k) et r_{Max}(k) (de la forme Ck/(Log(k))^2)délimitant cette Comète.

On a vu :

$$m(k) \approx \frac{k}{(Log(k))^2}$$

On obtient :
m(3000)å48, m(10000) å117, m(50000)å427, m(60000)å496, m(75000)å595, m(90000)å691, m(100000)å756.

On peut vérifier que les points (i,R(i)) sont à lôintérieur de la Comète de Goldbach et que les courbes dôéquation r_{min}(k)=0.7k/(Log(k))^2 et r_{Max}(k)=2k/(Log(k))^2 la délimitent.

On remarque aussi que les bandes observées sur la Comète de Goldbach ne sont pas prédites par la loi numérique aléatoire Hr_{ind}. Ceci est dû au fait que comme on lôa vu, cette loi numérique aléatoire nôest pas exacte. Nous verrons dans un second article quôune estimation plus précise de la fonction r(k) permet dôobtenir ces bandes.

Pour obtenir une autre loi aléatoire intéressante, on montre le Théorème suivant :

THEOREME 3.3.2 :
Si $f_1(k_1)$,é .$f_n(k_n)$ sont à valeurs dans des ensembles finis If_1,..,If_n et sont modélisées par des variables aléatoires $Xf_1(k_1)$,é ,$Xf_n(k_n)$ définies sur le même espace probabilisable (k_1,..,k_n étant des naturels quelconques, et f_1,é ,f_n des fonctions. $Xf_i(k_i)$ est donc à valeurs dans If_i) , alors pour toute fonction F($f_1(k_1)$,é ,$f_n(k_n)$) à valeur dans {h_1,é ,h_m}, et pour tout l dans {1,é m} :
« F($f_1(k_1)$,..,$f_n(k_n)$)=h_l » est modélisée par lôévènement « F($Xf_1(k_1)$, é ,$Xf_n(k_n)$)=h_l ».

Démonstration :

Dôaprès lôhypothèse, les $f_i(k_i)$ prennent un nombre fini de valeurs dans lôensemble fini If_i:
Donc lôéquation :« $F(x_1,$é $,x_n)=h_l$ pour x_i appartient à If_i » admet un nombre fini de solutions. Soit s ce nombre.
On peut donc écrire ces solutions sous la forme :
$(a_{11},$é $.,a_{1n})$, é .,$(a_{s1},$é $.,a_{sn})$.
Alors on a : « $F(f_1(k_1),$é $,f_n(k_n))=h_l$ » est équivalent à la proposition:
« « $f_1(k_1)=a_{11}$ eté et $f_n(k_n)=a_{1n}$ »oué .,ou « $f_1(k_1)=a_{s1}$ et et $f_n(k_n)=a_{sn}$ » ».
Alors en utilisant la Remarque 2.6 et que « $f_i(k_i)=a_{ji}$ » est modélisée par « $Xf_i(k_i)=a_{ji}$, on obtient :
« $F(f_1(k_1),$é $,f_n(k_n))=h_l$ » est modélisé par lôévènement :
« $Xf_1(k_1)=a_{11}$ et et $Xf_n(k_n)=a_{1n}$ » ou,é .ou « $Xf_1(k_1)=a_{s1}$ et et $Xf_n(k_n)=a_{sn}$ »
Or il est clair que cet évènement est équivalent à :
« $F(Xf_1(k_1),$é $.,Xf_n(k_n))=h_l$. » (puisque les variables aléatoires $Xf_i(k_i)$ sont à valeurs dans If_i).
On a donc montré :
« $F(f_1(k_1),$é $,f_n(k_n))=h_l$ » est modélisée par « $F(Xf_1(k_1),.. ,Xf_n(k_n))=h_l$ ».

Ceci étant vrai pour tout h_l dans $\{h_1,$é $,h_m\}$, on a donc le corollaire immédiat :

COROLLAIRE 3.3.3 :
Si $f_1(k_1),$é $,f_n(k_n)$ sont à valeurs dans des ensembles finis et sont modélisées par des variables aléatoires $Xf_1(k_1),$é $,Xf_n(k_n)$ définies dans le même espace probabilisable, alors toute fonction $F(f_1(k_1),$é $f_n(k_n))$ est modélisée par la variable aléatoire : $F(Xf_1(k_1),$é $,Xf_n(k_n))$.
Il est évident quôon peut remplacer dans ce qui précède « est modélisée » par « est modélisée exactement », puisque comme on lôa utilisé dans la Remarque 2.6, la propriété de correspondance est valide dans les 2 cas. De plus, on aurait pu aussi prendre $k_1=..=k_n=k$, puisque les k_i sont des naturels quelconques, ou remplacer $f_i(k_i)$ par $f(k_i)$ puisque les f_i sont des fonctions quelconques (à valeur dans des ensembles finis).

Appliquant ce Corollaire, on obtient la loi numérique aléatoire (prenant pour « $f_i(k_i)$ » les « r(i) »):
$H_{moy}r$: « Si on considère k =220p, où p naturel supérieur à 50, et si $f_{moy}(k)$ est définie pour k=220p par :

$$f_{moy}(k) = \frac{1}{101} \times \sum_{i=k-100}^{i=k+100} r(i)$$

alors $f_{moy}(k)$ est modélisée par la variable aléatoire :

$$Xf_{moy}(k) = \frac{1}{101} \times \sum_{i=k-100}^{k+100} Xr_{ind}(i) \text{ »}$$

Les $Xr_{ind}(i)$ ayant été définis précédemment. On rappelle quôon a défini ces variables aléatoires sur le même espace probabilisable, et de plus plus généralement on peut considérer par définition que des variables aléatoires indépendantes doivent être définies sur le même espace probabilisable. On est donc dans le cas dôapplication du Corollaire 3.3.3.

Lôintérêt de la loi numérique aléatoire précédente est que dôune part les $Xf_{moy}(k)$ sont indépendants, et que dôautre part si on considère que pour i dans [k-100,k+100] la moyenne m(i) et la variance v(i) de $Xr_{ind}(i)$ varient peu et sont proches de m(k) et v(k), on peut sôattendre en procédant comme pour obtenir la loi faible des grands nombres à ce que $Xf_{moy}(k)$ soit proche de m(k)å$R(k)=k/(Log(k))^2$.

Pour étudier la fonction $f_{moy}(k)$, on doit procéder comme dans lôétude de lôExemple précédent étudiant r(k). On obtient donc des intervalles de confiance à 99% I(k) de la variable aléatoire $Xf_{moy}(k)/(E(Xf_{moy}(k)))$.
On obtient alors des propositions illustrées par des tests ayant une pseudo-preuve aléatoires $Q2_{eq}(f_{moy}(k))$ et $Q2_{eq}(f_{moy}(k),B1,B2)$ analogues aux propositions $Q2_{eq}(r(k))$ et $Q2_{eq}(r(k),B1,B2))$ obtenues dans lôExemple précédent.

4.CONCLUSION

On a donc présenté une théorie aléatoire des nombres (T.A.N), basée sur des nouvelles Définitions et pseudo-Axiomes introduisant les lois du hasard dans la Théorie des nombres, qui apparaît comme étant fondamentale pour proposer une solution à des problèmes qui nôont jamais été résolus comme par exemple la

Conjecture faible de Goldbach. On a vu que la T.A.N était basée sur lôAxiome du Hasard, cette Axiome du Hasard entraînant la nécessité dôune nouvelle logique, logique du hasard constituée par les pseudo-Axiomes.
On peut penser avec quasi certitude que de nombreuses propositions vraies en théorie des nombres nôont pas dôautres explications théoriques quô une explication théorique aléatoire, c'est-à-dire basée sur le hasard. La T.A.N peut être considérée comme la théorie permettant lôétude de ces propositions. On peut sôattendre quôon ne puisse pas montrer quôune proposition en théorie des nombres ait une *démonstration* basée sur le hasard dôune part car cela nôa jamais été fait pour aucune proposition et dôautre part parce que les Axiomes classiques de la Théorie des nombres nôintroduisent pas le hasard contrairement aux pseudo-Axiomes de la T.A.N.
Le fait quôune proposition ait une explication aléatoire est fondamental car cela signifie :
a)Quôon a montré quôelle a une explication théorique basée sur le hasard.
b)Quôon a déterminé précisément les modèles statistiques dont elle peut être la conséquence et lôorigine de la validité de ces modèles.
c)Que cette explication est fondamentale puisque la proposition nôa pas de preuve classique, et quôil est tout à fait possible que celle-ci nôexiste pas si la seule origine de la validité de la proposition est le hasard et ses lois concernant les nombres.

On a donc vu que les pseudo Axiomes étaient fondamentaux en T.A.N, puisquôils introduisaient des modèles statistiques. Le fait quôils ne soient pas toujours valides est dû au fait que les modèles statistiques peuvent être valides ou invalides dans des situations totalement analogues.

En fait, il semble exclu quôune théorie du hasard en Théorie des nombres existe sans contenir des pseudo-Axiomes et Axiomes analogues à ceux que nous avons présentés dans cet article. Nous avons proposé dans cet article lôapplication de la T.A.N à la Conjecture faible de Goldbach parce que côest lôapplication simple la plus intéressante, mais il existe des applications beaucoup plus simples et évidentes.

Par exemple on obtient facilement en utilisant les Axiomes et pseudo-Axiomes présentés dans cet article les propriétés statistiques des décimales de nombreux réels (pi..). Ces exemples sont les plus simples et évidentes applications de la T.A.N, et constituent la plus évidente preuve de sa validité et de son importance, et en particulier de la validité du pseudo-Axiome du modèle équiprobable présenté dans cet article. On obtient dans ces exemples des modèles statistiques exacts (Déf.2.1), et donc des lois numériques aléatoires exactes, et des explications théoriques aléatoires à de nombreuses propositions exprimant les propriétés statistiques des décimales de réels.

Comme toutes les propositions ayant une explication aléatoire, si on arrivait à prouver classiquement la Conjecture faible de Goldbach ou les propriétés générales de la Comète de Goldbach quôon a obtenues dans cet article, alors leur explication théorique basée sur la T.A.N perdrait son intérêt. Cependant, cela fait plus de 2 siècles quôon essaie sans succès de les démontrer, alors quôon a déjà montré (par Vinogradov) toutes les formules analogues prouvant que tout nombre pair est la somme de 2n nombres premiers, avec n supérieur à 2, et une explication serait que la Conjecture faible et forte de Goldbach aient une origine purement due au hasard, sans preuve classique.

En fait, il est certain quôil existe dôautres pseudo-Axiomes aléatoires que ceux présentés dans cet article, mais ils doivent nécessairement avoir un caractère dôévidence et de simplicité. Nous verrons dans un second article (T.A.N-Partie II) quôil est possible dôobtenir par la TAN la Conjecture Forte de Goldbach, c'est-à-dire une estimation de r(k) très proche de la Conjecture de Hardy et Littlewood [6]. Ceci est cependant plus complexe que lôobtention de la Conjecture faible de Goldbach(r(k)>0 pour tout k pair). Nous verrons aussi dans ce second article quôil est possible dôobtenir la Conjecture Forte des nombres premiers jumeaux qui est exactement celle proposée par Hardy et Littlewood. Côest aussi un très grand succès de la TAN.

References :

1.E.J Borowski, J.M Borwein,Mathematics, *Collins Dictionnary* (GB 1984).
2.J.P Delahaye, *Merveilleux nombres premiers*, Belin (Paris 2000)
3.M.R Spiegel, J.S Schiller, R.Srinivasan, *Probability and Statistics*, McGraw Hill (2000)
4. P.Roger, *Probabilités statistiques et processus stochastiques*, Pearson (France 2004).
5.O.Rioul ,*Théorie des probabilités*, Lavoisier, (Paris 2008).
6.Hardy and Littlewood, *On the expression of a number as a sum of primes*, Acta mathematica (1923).

Titre : THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES- PARTIE II : CONJECTURES FORTES DE GOLDBACH ET DES NOMBRES PREMIERS JUMEAUX.
Auteur :Thierry DELORT
Date : 31 Octobre 2011

Résumé :
Dans un premier article [5] (Théorie aléatoire des nombres- Partie I : Conjecture de Goldbach), nous avons présenté les bases dôune théorie aléatoire des nombres, permettant de donner une explication basée sur le hasard à de nombreuses propositions qui semblent vraies mais nôont pas de preuve classique. Nous avons appelé *explications aléatoires* de telles explications rationnelles basées sur le hasard. Côétait en particulier le cas pour la Conjecture faible de Goldbach, et pour des propositions décrivant lôaspect général de la Comète de Goldbach.
Dans cet article, nous développons la Théorie Aléatoire des Nombres (TAN), et il apparaît quôelle donne aussi des explications aléatoires à des propositions concernant les décimales dôirrationnels ou concernant un certain type des sous-ensembles infinis de **N**, les *ensembles estimés*, qui sont des ensembles dont on a une estimation du nombre dôéléments inférieurs à n.
Nous donnons aussi des explications aléatoires aux Conjectures fortes de Goldbach et des Nombres Premiers Jumeaux.

1.INTRODUCTION

Dans un premier article [5] (Théorie aléatoire des nombres- Partie I :Conjecture faible de Goldbach), on a présenté une Théorie Aléatoire des Nombres permettant de donner des explications théoriques mathématiques basées sur le hasard à de nombreuses propositions qui nôont pas de démonstration dans la Théorie des nombres classiques. On a défini complètement ces explications théoriques mathématiques basées sur le hasard quôon a appelées *explications aléatoires*. On a vu en particulier que tel était le cas pour la Conjecture faible de Goldbach, et que la Théorie Aléatoire des Nombres permettait de lui donner non seulement une explication aléatoire, mais aussi dôen donner à des propositions décrivant lôaspect général de la Comète de Goldbach. Ceci était fondamental puisque ni la Conjecture faible de Goldbach ni ces propositions décrivant lôaspect général de la Comète de Goldbach nôont de démonstration classique.

On rappelle que la T.A.N est basée sur lôAxiome du Hasard exprimant lôexistence de modèles statistiques non-certains (c'est-à-dire non démontrable classiquement) exprimant des propriétés des nombres. On a vu que cet Axiome entraînait la nécessité dôintroduire une nouvelle logique du hasard utilisant des pseudo-Axiomes aléatoires, qui sont des propositions particulières propres à la TAN, définies dans le premier article [5], exprimant notamment la validité de modèles statistiques dans certains cas. Ces pseudo-Axiomes aléatoires sont analogues à des Axiomes classiques. Leur particularité est quôils ne sont pas toujours valides : Les modèles statistiques quôils permettent dôobtenir peuvent être valides dans un cas et invalides dans un cas complètement analogue. Cependant, tout comme les Axiomes classiques, ils sont simples et on peut les justifier par des arguments intuitifs évidents. Tout comme les Axiomes classique, ils nôont cependant pas de démonstration.

Dans cet article, on présente de nouvelles applications de la Théorie Aléatoire des Nombres (TAN). La première application présentée dans ce 2ième article est aussi la plus simple de la TAN . Elle permet dôétudier les propriétés des décimales de nombreux irrationnels. Là encore non seulement on montre que des propositions prévoyant quôelles ont un nombre infini de répétitions de chiffres ont des explications aléatoires, mais que côest aussi le cas pour des propositions prévoyant la fréquence dôapparition de ces répétitions de chiffres. Là encore ces *explications aléatoires* (c'est-à-dire donc basées sur le hasard) sont fondamentales puisque ces propositions nôont pas de démonstration classique.

La deuxième application présentée dans ce 2ième article permet lôétude des *ensembles estimés* c'est-à-dire des sous-ensembles infinis de **N** dont on a une estimation de leur nombre dôéléments inférieurs à n pour n tendant vers lôinfini.

Comme troisième applications de la T.A.N, on a donné une explication aléatoire à la Conjecture Forte de Goldbach, donnant une expression de r(k), nombre de paires de nombres premiers dont la somme donne k.

$$r(n) \cong \Pi_2 \Big(\prod_{p/n,\, p\geq 3} \frac{p-1}{p-2} \Big) \frac{n}{\ln(n)^2} \quad \text{où } \Pi_2 \approx 0,66016$$

Cette expression diffère d'un facteur 2 de l'expression proposée par Hardy et Littlewood (7) mais elle est en bien meilleur accord avec la Comète de Godbach obtenue par ordinateur.

On donnera aussi une explication aléatoire à la Conjecture Forte des Nombres Premiers jumeaux qui est exactement l'expression proposée par Hardy et Littlewood.

2.THEORIE (RAPPELS)

A)RAPPELS THEORIE ALEATOIRE DES NOMBRES

On a vu [5] que la TAN permettait d'étudier le hasard dans la Théorie des nombres. Elle était basée sur des *pseudo-Axiomes aléatoires* qui sont des propositions simples introduisant le hasard sous la forme de modèles statistiques, mais qui contrairement aux Axiomes ne sont pas toujours valides. Ceci est dû au fait que les modèles statistiques peuvent être valides dans un cas et non valides dans d'autres cas complètement analogues.

On a dans le premier article [5] défini le concept qu'une proposition P *est modélisée* (resp. *modélisée exactement*) par un évènement Ev. Dans cette définition, on avait la *propriété de correspondance*. Cette propriété fondamentale exprimait que si on avait une proposition P1 modélisée (resp. modélisée exactement) par un évènement Ev1, et qu'une autre proposition P2 était modélisée (resp. modélisée exactement) par un évènement Ev2, alors on avait Non(P1) était modélisée (resp. modélisée exactement) par l'évènement Ev1, et si Ev1 et Ev2 appartenaient au même espace probabilisable, la proposition « P1 et P2 » était modélisée (resp. modélisée exactement) par l'évènement « Ev1 et Ev2 », et la proposition « P1 ou P2 » était modélisée (resp. modélisée exactement) par l'évènement « Ev1 ou Ev2 ».

Nous avons généralisé cette propriété au cas où on avait une infinité de propositions Pi, i appartenant à un sous-ensemble E de **N**, modélisées (resp. modélisées exactement) par des évènements Evi appartenant au même espace probabilisable, d'Univers infini. Alors la propriété de correspondance généralisée exprimait que la proposition $\cap (Pi)_E$ (qui était par définition équivalente à la proposition « Pour tout i dans E, Pi est vraie ») était modélisée (resp. modélisée exactement) par l'évènement $\cap (Evi)_E$. Et une propriété analogue pour l'union.

De plus, d'après la Définition, si P1 est modélisée exactement par un évènement Ev1, alors P1 se comporte comme si elle avait la probabilité p(Ev1) d'être vraie. Si la proposition P1 est modélisée par l'évènement Ev1, alors dans certains cas particuliers P1 est modélisée exactement par Ev1, et dans d'autres cas particuliers P1 se comporte comme si elle avait la probabilité p1 d'être vraie, avec $p1 \neq p(Ev1)$.

Dans le cas où P1 se comporte comme si elle avait la probabilité p1 d'être vraie, avec $p1 \neq p(Ev1)$, on dira que P1 est *modélisée presqu'exactement par* Ev1.

Ainsi dans la TAN, les concepts « est modélisée », « est modélisée presqu'exactement », ou « est modélisée exactement » permettent de représenter de façon plus ou moins complète les propriétés statistiques de propositions.

Un deuxième concept fondamental de la TAN était celui de propositions particulières appelées *lois numériques aléatoires*.

DEFINITION 2.A.1 :
a)Si f(k) est une fonction d'un sous-ensemble F de **N** dans **N**, on appelle *loi numérique aléatoire sur F* la proposition :
« f(k) est modélisée par la variable aléatoire Xf(k) »

Par Définition, cela signifie que pour tout k dans F, f(k) est à valeur dans un sous-ensemble fini F(k) de **R**, que Xf(k) est une variable aléatoire aussi à valeur dans F(k), et que pour tout i_k dans F(k), la proposition « $f(k)=i_k$ » est modélisée par l'évènement « $Xf(k)=i_k$ ».

b)Si on a la loi numérique aléatoire définie précédemment, on dira qu'elle *est exacte* si on a toujours « $f(k)=i_k$ » est modélisée exactement par l'évènement « $Xf(k)=i_k$ ».
On dira alors aussi que « f(k) est *modélisée exactement* par la variable aléatoire Xf(k) ».
On a généralisé aussi la propriété de correspondance dans le cas où on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F infini, et que toutes les variables aléatoires étaient définies sur le même espace probabilisable. Cette propriété de correspondance généralisée exprime qu'avec les hypothèses précédentes, si on a une proposition $P(f(k)_F)$ dont la validité dépend seulement de la suite $(f(k))_F$, alors la proposition $P(f(k)_F)$ est modélisée par l'évènement $P((Xf(k))_F)$, lorsque $P(Xf(k))_F)$ est un évènement. On avait montré ceci lorsque F était fini, en utilisant la propriété de correspondance, et on l'avait généralisé dans le cas où F était infini. Une conséquence de la propriété de correspondance état donc, utilisant ce qui précède, que si on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F : «f(k) est modélisée par la variable aléatoire Xf(k) », les Xf(k) étant définies sur le même espace probabilisable, alors pour tout multiplet $(i_1,..,i_n)$ de F^n, et pour toute fonction $G(x_1,…,x_n)$ de $\mathbf{N}^n$ dans **R**, alors la fonction $G(f(i_1),…,f(i_n))$ était modélisée par la variable aléatoire

G(Xf(i_1),é ,Xf(i_n)).(C'est-à-dire que pour toute valeur h prise par G(f(i_1,..,f(i_n)), « G(f(i_1),é ,f(i_n))=h » est modélisée par lôévènement « G(Xf(i_1),é ,Xf(i_n))=h »).

On a vu que par Définition de « est modélisée », si une proposition P est modélisée par un évènement Ev, alors dans certains cas particuliers P est modélisée exactement par Ev et dans dôautres P est modélisée presquô exactement par Ev. A cause de cela, on a un pseudo-Axiome aléatoire fondamental, la *pseudo-Axiome du modèle exact*, quôon utilise toujours pour obtenir quôune proposition classique a une explication aléatoire :

PSEUDO-AXIOME 2.A.2 (du modèle exact):
Si P est une proposition classique et si on a la loi numérique aléatoire sur un ensemble F={1} :
« t(P)(1) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P)(1) »
(t(P) étant classiquement la fonction vérité de P, à valeurs dans {0,1}), et quôon a de plus p(Xt(P)(1)=1)å1, alors lorsque le pseudo-Axiome du modèle exact est valide pour cette loi numérique aléatoire précédente, on a t(P)=1. (Et donc P est vraie).

Il est évident que si on a la proposition « t(P) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P) », on peut identifier cette proposition a une loi numérique aléatoire sur un ensemble F={1}, et donc appliquer le pseudo-Axiome précédent si on a p(Xt(P)=1)å1.

Dans le précédent article [(5)], les modèles statistiques étaient basées sur des espace probabilisables équiprobables. On a utilisé de tels modèles pour donner des explications aléatoires à la Conjecture de Goldbach ou à des propositions décrivant les propriétés de la Comète de Goldbach. Ces modèles étaient obtenus par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable suivant :

PSEUDO-AXIOME 2.A.3 (du modèle équiprobable) :
Si on a une proposition Pk : « x_k est élément de A_k », A_k étant un ensemble fini dont on connaît le nombre dôéléments, sous-ensemble dôun ensemble fini q$_k$ dont on connaît aussi le nombre dôéléments, alors lorsque le pseudo-Axiome du modèle équiprobable est valide pour (x_k,A_k,q$_k$), la proposition Pk : « x_k est élément de A_k » est modélisée par lôévènement Evk :« $x_{(k)}$ est élément de A_k » de lôespace probabilisable équiprobable (q$_k$,*P*(q$_k$), $p_{eqq\,k}$), quôon appellera plus simplement espace équiprobable q$_k$.
La probabilité dans cet espace de Evk est donc égale à Card(A_k)/Card(q$_k$).

En fait le pseudo-Axiome du modèle équiprobable précédent, ainsi comme on le verra les pseudo-Axiomes donnant un modèle statistique aux ensembles estimés, permettent dôobtenir des lois numériques aléatoires, mais dans lesquelles les variables aléatoires ne sont pas définies sur le même espace probabilisable. Or la seule possibilité dôobtenir des résultats intéressants est que ces variables aléatoires non seulement soient définies sur le même espace probabilisable mais aussi soient indépendantes.
On doit donc utiliser un pseudo-Axiome permettant dôobtenir que ces variables aléatoires sont indépendantes, le *pseudo-Axiome des variables indépendantes* ce qui est possible car on a vu que lôapplication dôun pseudo-Axiome aléatoire nôest pas toujours valide, contrairement à un Axiome, puisque les modèles statistiques quôil introduit ne sont pas toujours valides.

PSEUDO-AXIOME 2.A.4 (des variables indépendantes) :
Si on a une loi numérique aléatoire sur F « f(k) est modélisée par Xf(k) », alors lorsque le pseudo-Axiome des variables aléatoires est valide pour cette loi, on obtient la loi précédente dans laquelle les variables aléatoires Xf(k) sont définies sur le même espace probabilisable et sont indépendantes.

Si une proposition admet une *explication aléatoire*, c'est-à-dire une explication rationnelle basée sur le hasard obtenue par la TAN, cette explication est différente dôune preuve classique basée sur les Axiomes classiques de la Théorie des Nombres. En effet, elle est basée sur lôexistence de certains modèles statistiques, obtenus par des pseudo-Axiomes, qui ne sont pas toujours valides. On définit donc de la façon suivante *une explication aléatoire* :

DEFINITION 2.A.5 :
a) On appelle *pseudo-preuve aléatoire* dôune loi numérique aléatoire ou dôune proposition classique son obtention utilisant certains pseudo-Axiomes de la TAN ainsi que la Théorie classique des nombres et celle des probabilités.

b) Si une proposition classique ou une loi numérique aléatoire a une pseudo-preuve aléatoire et que de plus on ne lõait jamais montré classiquement ni sa négation, alors on dira quõelle a une *explication aléatoire*.

Comme on lõa vu dans lõarticle [5], cõest surtout pour les propositions illustrées par de nombreux tests (résultats obtenus par des nombres finis dõopérations, éventuellement par un ordinateur) quõil est le plus intéressant dõobtenir une explication aléatoire. Ceci était notamment le cas pour la Conjecture de Goldbach et les autres propositions obtenues décrivant la Comète de Goldbach.

B.RAPPELS :THEORIE DES PROBABILITES

On rappelle les éléments basiques mais fondamentaux de la théorie des probabilités :

THEOREM 2.B.1 :
Si X_1,é ,X_n sont n variables aléatoires :

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

THEOREM 2.B.2 :
Si X_1,..,X_n sont n variables aléatoires indépendantes , $v(X_i)$ étant la variance de X_i:

$$v(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} v(X_i)$$

DEFINITION 2.B.3 :
Si X est une variable aléatoire avec les 2 évènements « X=1 » et « X=0 » alors X est une loi binomiale.

THEOREM 2.B.4 :
Si X est une loi binomiale de loi p (p(X=1)=p), alors :
E(X)=p et v(X)=p(1-p)

DEFINITION 2.B.5 :
Si$(X_i)_{\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires définie sur un espace probabilisable (q ,*B*,p), alors la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ *converge en probabilité* vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon,\delta) / \forall n \geq N(\varepsilon,\delta), p("\left|X_i - a\right| \leq \varepsilon") \geq 1-\delta$$

DEFINITION 2.B.6 :
Si $(X_i)_{\mathbf{N}}$ est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisable (q ,*B*,p), la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers a si « $\lim_{n\to\infty} X_i = a$ » est un évènement de la tribu *B* de probabilité égale à 1.

On écrira aussi ceci :

$$p("\lim_{n\to\infty} X_i = a") = 1$$

Il est aussi intéressant dõintroduire la notion de convergence absolue en probabilité.

DEFINITION 2.B.7 :
$(X_i)_{\mathbf{N}}$ étant une suite de variable aléatoire, la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ converge *absolument en probabilité* vers a (a réel) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon,\delta) / \forall n \geq N(\varepsilon,\delta), p(\bigcap_{i=N(\varepsilon,\delta)}^{n} "\left|X_i - a\right| \leq \varepsilon") \geq 1-\delta$$

On a évidemment que si la suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ converge absolument en probabilité vers a, alors elle converge en probabilité vers a. On montre de plus le Théorème :

THEOREM 2.B.8 :
Si la suite de variables aléatoires $(Y_i)_{\mathbf{N}}$ définie sur un espace probabilisable (q ,*B*,p) converge absolument en probabilité vers a, alors elle converge presque sûrement vers a.

(On donne la démonstration de ce Théorème à car il pourrait permettre de démontrer la Loi Forte des Grands Nombres généralisée que nous définirons plus loin).
Démonstration :
On suppose a=1 (si aÍ 1 on considère Y_i/a).
Dôaprès la définition de la convergence absolue en probabilité :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists N(\varepsilon,\delta) / \forall n > N(\varepsilon,\delta),\ p(\bigcap_{N(\varepsilon,\delta)}^{n} "|Y_i - 1| \leq \varepsilon") \geq 1-\delta$$

On veut prouver:

$$p("\lim_{n\to\infty} Y_n = 1") = 1$$

où « $\lim_{n\to\infty} Y_n = 1$ » représente lôévènement de q pour lequel la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ tend vers 1.
Soit ŭ >0, on définit la suite de naturels N_k par, pour k dans N*:
N_k=N(1/k,ŭ).
Ceci signifie:

$$\forall n \geq N_k,\ p(\bigcap_{i=Nk}^{n} "|Y_i - 1| \leq 1/k") \geq 1-\delta$$

On définit alors les évènements E_k par :
E_k: « $\exists M_k / \forall n \geq M_k, |Y_n - 1| \leq 1/k$ »

Si on considère lôévènement: $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$
Il est évident que :

$$"\lim_{n\to\infty} Y_n = 1" \subset "(Y_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k" \text{ et } "(Y_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k" \subset "\lim_{n\to\infty} Y_n = 1"$$

Donc les 2 évènements précédents sont identiques.
De plus la suite dôévènements E_k est décroissante donc :

$$p(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{p\to\infty} p(E_p)$$

De plus, il est évident que:

$$\bigcap_{i=Np}^{\infty} "|Y_i - 1| \leq 1/p" \subset E_p$$

Et donc:

$$p(E_p) \geq p(\bigcap_{i=Np}^{\infty} "|Y_i - 1| \leq 1/p") = \lim_{n\to\infty} p(\bigcap_{i=Np}^{n} "|Y_i - 1| \leq 1/p") \geq 1-\delta$$

Et donc:

$$p(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{p\to\infty} p(E_p) \geq 1-\delta$$

Ceci étant vrai pour tout ŭ>0 :

$$p("\lim_{n\to\infty} Y_n = 1") = p(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$$

On utilisera la Loi Faible des Grands Nombres et la Loi Forte des Grands Nombres:

Loi Faible des Grands nombres 2.B.9:

Si on a une suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors la suite
$Y_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{n}$ converge simplement vers ε =E(X_i).(Si ε est fini).

Loi Forte des Grands Nombres 2.B.10 :
Avec les hypothèses et les notations précédentes, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers ε.

On a vu que la convergence absolue en probabilité entraînait la convergence presque sûre. Il est donc intéressant de considérer la Loi Forte des Grands Nombres $2^{\text{ième}}$ forme :

Loi Forte de Grands Nombres $2^{\text{ième}}$ forme 2.B.11:
Avec les hypothèses et notations précédentes la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge absolument en probabilité vers ε.

On utilisera aussi lôInégalité de Chebyshev :
THEOREM 2.B.12 :
Si Y est une variable aléatoire dôespérance ε et de variance ů^2, si Ůest un réel strictement positif :

$$p("|Y-\mu| \geq \varepsilon") \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

On rappelle aussi le résultat utilisé dans lôarticle [(5)] :

THEOREM 2.B.13 :
Si E est un ensemble à n éléments, E(a) et E(b) étant les ensembles des sous-ensembles de E ayant a et b éléments, si X_I est la variable aléatoire définie sur lôespace équiprobable E(a)×E(b) donnant le nombre dôéléments communs de A et B pour (A,B) dans E(a)×E(b), on a alors :

$$E(X_I) = \frac{ab}{n}$$

3.DECIMALES DôIRRATIONNELS

La TAN permet dôobtenir très simplement de nombreux résultats sur les décimales dôirrationnels dont on peut vérifier la validité en utilisant des ordinateurs mais qui nôont jamais été prouvés classiquement. Nous allons en proposer 2 exemples :

EXEMPLE 3.1
Montrons comme premier exemple que la proposition :
P :« ã3 a dans ses décimales une infinité de fois le nombre 5 » a une explication aléatoire, c'est-à-dire quôon peut lôobtenir en utilisant les pseudo-Axiomes de la TAN, alors quôon ne lôa jamais démontrée classiquement. La méthode suivante est générale, on aurait pu remplacer ã3 par ´, ã2, Log(5) é et 5 par nôimporte quel autre chiffre.

La proposition P admet la pseudo-preuve aléatoire suivante :
On note f(i)la fonction donnant la valeur de la $i^{\text{ième}}$ décimale de ã3 .
On a donc :
f(i) appartient à A_i={0,1,é .,9}.

En appliquant le pseudo-Axiome 2.A.3 du modèle équiprobable, on obtient que la proposition « f(i) est élément de {5} » est modélisé par un évènement de probabilité Card({5})/Card(A_i)=1/10.
Si on pose pour tout i dans **N***, g(i)=t(« f(i)=5 »), c'est-à-dire g(i)=1 si f(i)=5, et g(i)=0 sinon, on obtient la loi numérique aléatoire sur **N***:
« g(i) est modélisée par Xg(i) », avec p(« Xg(i)=1 »)=1/10.

Appliquant le pseudo-Axiome 2.A.4 des variables indépendantes à la loi numérique aléatoire précédente, on peut alors supposer que les Xg(i) sont définies sur le même espace probabilisable et sont indépendantes.
i étant un naturel non nul quelconque, on cherche à modéliser par un évènement la proposition :
Pi : « Il existe au moins un naturel k(i) supérieur ou égal à i tel que la k(i)$^{\text{ème}}$ décimale soit égale à 5 ».
Il est évident que Pi est équivalente à :
« Il existe k(i) supérieur ou égal à i tel que g(k(i))=1 ».

On définit alors Fi comme étant le sous-ensemble des suites de $\{0,1\}^{\mathbf{N}^*}$ (suites comportant seulement des 0 et des 1), ayant au moins un terme égal à 1 après le i$^{\text{ème}}$ terme (au sens large).
Alors il est évident que Pi est équivalente à :
« $((g(j))_{\mathbf{N}^*}$ est élément de Fi ».

Dõaprès la propriété de correspondance généralisée donnée dans 2.A RAPPELS TAN, Pi est donc modélisée par lõévènement Ev(Pi) : « $((Xg(j))_{\mathbf{N}^*}$ est élément de Fi ».
Or il est évident que lõévènement Non(Ev(Pi)) est lõévènement :
Non(Ev(Pi)) : « Pour tout j supérieur ou égal à i, Xg(j)=0 ».

Or comme les Xg(j) sont indépendantes, la probabilité de Non(Ev(Pi)) est égale à :

$$p(Non(Ev(Pi)) = \prod_{j=1}^{\infty} p("Xg(j)=0") = \prod_{j=1}^{\infty}(9/10) = 0$$

On a donc p(Non(Ev(Pi)))=0 et p(Ev(Pi))=1.

Dõautre part il est évident que la proposition P : « Il existe une infinité de décimales égales à 5 dans les décimales de ã(3) » est équivalente à :
« Pour tout i dans **N***, Pi est vrai ».
Dõaprès la propriété de correspondance généralisée donnée dans 2.A RAPPELS TAN, la proposition précédente est modélisée par lõévènement :
« Pour tout i dans **N***, Ev(Pi) »
Or il est évident que pour tout i Ev(Pi+1) entraîne Ev(Pi), c'est-à-dire Ev(Pi+1) est inclus dans Ev(Pi).
On a donc :

$$p(\bigcap_{i=1}^{\infty}(Ev(Pi)) = \lim_{n\to\infty} p(\bigcap_{i=1}^{n} Ev(Pi)) = \lim_{n\to\infty} p(Ev(Pn)) = 1$$

puisquõon a obtenu p(Ev(Pn))=1 pour tout n.

Donc P est modélisée par un évènement de probabilité 1.
Appliquant alors le pseudo-Axiome 2.A.2 du modèle exact on obtient donc P.
Puisque P nõa jamais été démontrée classiquement (ni sa négation), P a donc une explication aléatoire (Définition 2.A.5).
EXEMPLE 3.2 :
Comme 2$^{\text{ième}}$ exemple, on peut montrer quõune autre proposition, beaucoup plus précise que P, et pouvant être illustrée par de nombreux tests, a une explication aléatoire.
Cette proposition est la proposition Q :

Q : $\lim_{n\to\infty} \frac{G(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} g(i)}{n} = 1/10$

Dans cette expression, G(n) indique le nombre de décimales égales à 5, parmi les n premières décimales.
En effet, les Xg(i) étant indépendantes et de même loi, dõaprès la Loi Forte des Grands Nombres :

$$p("\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} Xg(i)}{n} = 1/10") = 1$$

De plus dõaprès la propriété de correspondance généralisée (rappelée dans RAPPELS TAN 2.A) Q est modélisée par lõévènement de lõexpression précédente de probabilité égale à 1.

Donc Q est modélisée par un évènement de probabilité 1, et si on applique le pseudo-Axiome 2.A.2 du modèle exact on obtient Q.
Puisque Q n'a jamais été démontrée classiquement, Q a donc une explication aléatoire.
Q serait illustrée par des tests si on calculait G(n)/n pour plusieurs valeurs de n, et qu'on observait que G(n)/n semble tendre vers 1/10.

La loi numérique aléatoire :
« g(i) est modélisée par Xg(i) »
où les Xg(i) sont indépendantes et définies plus haut, pourrait être un exemple de loi numérique aléatoire exacte. Pour vérifier ceci il faudrait réaliser des tests statistiques.

4.ENSEMBLES ESTIMES

Le but de cette partie est d'étudier par la TAN les propriétés des *ensembles estimés*, c'est à dire des sous-ensembles de **N** dont on connaît une estimation de leur nombre d'éléments inférieurs à n. On verra que comme dans le domaine précédemment exposé de la TAN, la TAN permet de donner des explications aléatoires à de très nombreuses propositions qui n'ont jamais été prouvées classiquement.

4.A THEORIE

On utilisera la Loi Faible des Grands Nombres Généralisée :

Loi Faible des Grands Nombres Généralisée 4.A.1 (LfGN généralisée):
Si on a une suite $(X_i)_{\mathbf{N}}$ de lois binomiales indépendantes avec $p(X_i=1)=p(i)$ et que la série $\sum p(i)$ diverge, alors, si on définit la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ de variables aléatoire par :

$$Y_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} X_i}{\sum_{i=0}^{n} p(i)}$$, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 1.

Démonstration :
La démonstration généralise la démonstration de la Loi Faible des Grands Nombres classiques.
On pose $S_n=X_0+\ldots.+X_n$
D'après l'hypothèse, X_i est une loi binomiale associée à p(i). En utilisant les rappels 2.B, l'Espérance μ_i et la variance σ_i^2 de X_i sont :
$v(X_i)=\sigma_i^2=p(i)(1-p(i))$ et $\mu_i=p(i)$

$$E(S_n) = \sum_{i=0}^{n} E(X_i) = \sum_{i=0}^{n} p(i)$$

et donc $E(Y_n)=1$.

De plus, les lois X_i étant indépendantes :

$$v(Y_n) = v(\frac{S_n}{E(S_n)}) = \frac{v(S_n)}{(E(S_n))^2} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \sigma_i^2}{(\sum_{i=0}^{n} \mu_i)^2}$$

Si on applique l'inégalité de Chebyshev :

$$p("|Y_n - 1| \geq \varepsilon") \leq \frac{v(Y_n)}{\varepsilon^2}$$

mais on a :

$$\sum_{i=0}^{n}\sigma_i^2 = \sum_{i=0}^{n} p(i)(1-p(i)) \leq \sum_{i=0}^{n} p(i) = \sum_{i=0}^{n}\mu_i$$

et donc :

$$\frac{v(Y_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{n}\mu_i}$$

Mais par hypothèse $\sum\mu_i=\sum p(i)$ est divergeant, il en résulte que $v(Y_n)/\varepsilon^2$ tend vers 0 pour n tend vers l'infini et donc $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge en probabilité vers 1.

On admettra que de la même façon, on peut généraliser la Loi Forte des Grands nombres 1ière et 2ième forme pour obtenir les 2 lois :

Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 4.A.2(LFGN généralisée):
Avec les notations et les hypothèses de la Loi Faible des Grands nombres généralisée, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge presque sûrement vers 1.

REMARQUE 4.A.2.a)
Même si cette loi n'était valable que pour p(i) suite monotone, cela suffirait pour tous les exemples classiques de la TAN des ensembles estimés, notamment tous ceux présentés dans cet article.

En fait, si on a pour n assez grand $\sum_{i=1}^{n} p(i) > an$, a étant une constante strictement positive, la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée (LFGN généralisée) est une conséquence immédiate de la LFGN de Khintchine [(6)], dont on rappelle la formulation :

Si $(X_i)_{\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, X_i étant d'espérance m_i et les variances étant uniformément bornées ($\sigma_i^2<c$ pour tout i), alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_i)$ converge presque sûrement vers 0.

Cependant dans le cas général où p(i) tend vers 0, ce qui est le cas dans la plupart des Exemples donnés dans cet article, on ne peut pas généraliser la LFGN de Khintchine pour obtenir la LFGN généralisée.

Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 2ième forme 4.A.3:
Avec les notations et hypothèses précédentes, la suite $(Y_n)_{\mathbf{N}}$ converge absolument en probabilité vers 1.

On rappelle qu'on a prouvé dans le Théorème 2.B.8 que la Loi Forte des Grands Nombres généralisée 2ième forme entraînait la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée.
Ce qui précède va permettre par la TAN l'étude des ensembles estimés correspondant à la définition suivante :

DEFINITION 4.A.4: (*Ensembles estimés*)
On appelle *ensemble estimé d'estimation* a(n) un sous-ensemble infini A de **N** tel que, si A(n)={i/ $i\leq n$ et i appartient à A}, on ait :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Card(A(n))}{a(n)} = 1$$

Soit A un ensemble estimé d'estimation a(n). On cherche à modéliser la fonction caractéristique de A $f_A(i)$, i étant un naturel assez grand, c'est-à-dire supérieur à un naturel N_A. Le plus simple modèle statistique de $f_A(i)$ est celui défini par le *pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés* suivant, que nous allons justifier par des arguments intuitifs.

PSEUDO-AXIOME 4.A.5 (du modèle des ensembles estimés) :
Si A est un ensemble estimé d'estimation a(n) avec a(n) croissante, alors :

a)Lorsque le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés est valide pour (A,a(n)), il existe un naturel N_A tel que pour tout i supérieur ou égal à N_A, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par l'évènement « $x_{iA}=1$ » de l'espace probabilisable d'Univers $q_{iA}=\{0,1\}$, avec p(« $x_{iA}=1$ »)=p_{iA}=a(i)-a(i-1).
b)On verra dans la première justification intuitive de ce pseudo-Axiome aléatoire que pour que le modèle soit meilleur, il faut que pour n supérieur ou égal à 1, a(n) soit une bonne approximation de Card(A(n)) . On pourra donc choisir une valeur de N_A tel que ce soit le cas, par exemple choisir N_A tel que pour n supérieur à N_A, 0,9<Card(A(n))/a(n)<1,1.
Alors on dira qu'on a supposé que le pseudo-Axiome était valide pour (A,a(n),N_A)

On voit donc que dans l'application du pseudo-Axiome précédent, on peut choisir ou non la valeur de N_A.

En fait, on verra qu'en général, notamment dans la 2ième justification intuitive, que les propositions obtenues utilisant le modèle statistique de ce pseudo-Axiome ne dépendent que du comportement à l'infini de p_{iA}. Il en résulte qu'on peut alors les obtenir en choisissant n'importe quelle valeur de N_A (choisie assez grande, puisqu'on sait que plus N_A est grand meilleur est le modèle). On peut donc restreindre ou non le choix de N_A, dans l'application du pseudo-Axiome précédent pour (A,a(n),N_A).

Choisir une valeur de N_A permet d'obtenir des propositions illustrées par des tests qui ne le seraient pas si N_A était inconnu.

1ière justification intuitive :
i étant un naturel assez grand, on sait qu'une estimation du nombre de naturels appartenant à A strictement inférieurs à i est a(i-1), et qu'une estimation du nombre de naturels inférieurs ou égaux à i appartenant à A est a(i). Il s'ensuit qu'on peut approximer la probabilité que i appartienne à A par p_{iA} = a(i)-a(i-1). (Cette approximation est à priori d'autant meilleure que l'estimation a(n) de Card(A(n)) est précise).
Ceci signifie que pour i assez grand, « $f_A(i)=1$ » est modélisée presqu'exactement par un évènement de probabilité p_{iA}. D'après la définition de « est modélisée », on peut donc considérer que pour i assez grand, « $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}. Ceci justifie donc intuitivement la validité dans certains cas du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés.

2ième justification intuitive :
Supposons qu'on ait un sous-ensemble A de **N** dont la fonction caractéristique soit modélisée comme le modèle du a) du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés.
C'est-à-dire qu'on ait un naturel N_A et une fonction a(n) croissante telle que pour i supérieur ou égal à N_A, $f_A(i)$ soit modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}=a(i)-a(i-1).

Si on définit la variable aléatoire X_{iA} sur l'espace probabilisable du a) d'Univers q_{iA} par : $X_{iA}=x_{iA}$, alors on obtient la loi numérique aléatoire :
« Pour i supérieur à N_A, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire X_{iA} ».
Si on applique alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes, on obtient la loi précédente avec des X_{iA} variables indépendantes.
Appliquant alors la Loi Forte des Grands Nombres Généralisée 4.A.2, on obtient :

$$p(\text{"}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=NA}^{n} X_{iA}}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}=1\text{"})=1$$

Il en résulte que d'après la propriété de correspondance généralisée, la proposition :

$$\text{"}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=NA}^{n} f_A(i)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}=1\text{"}$$, est modélisée par un évènement de probabilité 1.

En appliquant le pseudo-Axiome du modèle exact, on obtient donc que cette proposition est vraie. Or il est évident que cette proposition est équivalente à « A est un ensemble d'estimation a(n) ». (Car dans l'expression numérique précédente, Σp_{iA}=a(n)-a(N_A-1))
On voit donc que le modèle statistique défini dans le pseudo-Axiome a), permet d'obtenir que la proposition « A est un ensemble estimé d'estimation a(n) » a une explication aléatoire.
Il apparaît donc que le modèle statistique proposé est le meilleur modèle statistique pour modéliser un ensemble estimé d'estimation a(n).
On voit dans cet exemple, comme dans la Remarque suivant le pseudo-Axiome, que la proposition obtenue dans la 2ième justification est indépendante du choix de N_A.

Le pseudo-Axiome précédent du modèle des ensembles estimés introduit la Définition suivante :

DEFINITION 4.A.6 (évaluation probabiliste) :
Si A est un sous-ensemble de **N** (fini ou non), tel qu'il existe un naturel N_A tel que l'on ait la loi numérique aléatoire, f_A étant la fonction caractéristique de A :
« Pour i supérieur à N_A, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire X_{iA} »
Avec $p(X_{iA}=1)=p_{iA}$,
On dira alors que A est un ensemble ***d'évaluation probabiliste*** p_{iA}, pour i supérieur à N_A.

De plus dans la 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés, on a établi un résultat fondamental, exprimé dans le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.7:
Si A est un ensemble ayant une évaluation probabiliste p_{iA}, pour i supérieur à N_A, et que Σp_{iA} diverge, alors la proposition :

« A est un ensemble estimé d'estimation $a(n) = \sum_{i=NA}^{n} p_{iA}$ » a une pseudo-preuve aléatoire.

On a vu que pour obtenir ce Théorème 4.A.7 on utilisait la LFGN généralisée 4.A.2.
Comme on l'a vu cependant la LFGN généralisée 4.A.2 de même que sa variante 4.A.3 ne se démontrent pas aussi facilement que la LFGN (qui n'était déjà pas évidente). Or, en utilisant seulement la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1 que l'on a démontrée, on peut obtenir aussi une évaluation de la fonction $S(n)=\Sigma_{[NA,n]} f_A(i)$.
En effet, on rappelle l'étude théorique d'une fonction par la TAN, donnée dans l'article (5) (Chapître 3.3) :

ETUDE THEORIQUE D'UNE FONCTION PAR LA TAN 4.A.7a)
On ne considèrera que 2 cas :
Dans le premier cas, on obtient par la TAN en utilisant un modèle statistique M1 une fonction F(k), telle que la proposition suivante P1 a une pseudo-preuve aléatoire :

P1 : « $\lim_{k\to\infty}(\frac{f(k)}{F(k)})=1$ » .

Dans le 2ième cas, on obtient par la TAN, en utilisant un modèle statistique M2 une fonction F(k), deux fonctions $\varepsilon_1(k)$ et $\varepsilon_2(k)$ positives et tendant vers 0 telle que, posant $I(k)=[1-\varepsilon_1(k),1+\varepsilon_2(k)]$, une proposition du type de la proposition suivante P2 a une pseudo-preuve aléatoire :

P2 : « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :
$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t("\frac{f(i)}{F(i)}\in I(i)")\geq p$ (En général on ne connaît pas explicitement F(n), mais on a F(n) équivalente à une fonction $F_A(n)$ connue)»

Dans la proposition précédente, p est un rationnel proche de 1 (p=0.98 par exemple). On a supposé que f(k) était définie sur **N**. Dans le cas général f(k) est définie sur un sous-ensemble infini F de **N**, et la sommation

ne porte que sur les éléments de F. On divise alors par le nombre dôéléments de F inférieurs à n. P2 exprime quôil existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N la proportion des naturels k appartenant à F et inférieurs à n tels que f(k)/F(k) appartiennent à I(k) est supérieure à p.
Dans certains cas P1 et P2 sont illustrées par des tests et donc on obtient une estimation de r(k) donnée par ces propositions. Pour voir si P1 ou P2 sont illustrées par des tests, on trace les points (k,f(k)/F(k)) (ou (k,f(k)/F_A(k))pour k aussi grand que possible. Si il apparaît que ces points (pour P1), ou un pourcentage proche de 1 de ces points (pour P2) tendent vers la droite dôéquation y=1, alors P1 ou P2 sont illustrées par les tests. Dans certains cas, P1 ou P2 tout en étant vraies ne sont pas illustrées par les tests. Côest le cas quand on ne peut pas réaliser les tests (C'est-à-dire calculer f(k)/F(k) ou f(k)/F_A(k)) pour k assez grand, à cause de limites comme la puissance maximale des ordinateurs. Si il apparaît que les points (k,f(k)/F(k)) (ou (k,F_A(k)) sont proches de 1 et sôen rapprochent quand k augmente, on pourra considérer que P1 ou P2 sont *partiellement* illustrées par les tests, même si ceux-ci ne font pas apparaître que les points (k,f(k)/F(k)) (ou (k,F_A(k)) tendent vers la droite dôéquation y=1. Dans ces cas, on doit essayer dôobtenir une fonction F_B(k) plus précise que F(k) ou F_A(k) pour estimer f(k).
Cependant, P1 et P2 ne sont vraies que dans certains cas où les modèles M1 ou M2 permettant dôobtenir P1 ou P2 sont valides avec une très bonne approximation. Un cas beaucoup plus général est le cas où M1 et M2, tout en étant valides avec une bonne approximation, ne le sont pas avec une qualité suffisante pour que les propositions du type P1 ou P2 quôils entraînent soient vraies. On remarque que toute proposition Q1 ou Q2 entraînée par P1 ou P2 a une pseudo-preuve aléatoire dôaprès la Définition 2.10. Cependant, pour que de telles propositions Q1 ou Q2 soient intéressantes, il faut dôune part quôelles soient illustrées par des tests, mais aussi quôelles illustrent la validité avec la meilleure qualité possible des modèles statistiques M1 ou M2 permettant dôobtenir P1 ou P2. Ceci est vrai si les propositions Q1 ou Q2 sont les plus proches possible de P1 ou P2 qui correspondent à la meilleure qualité des modèles M1 ou M2. Ce sera le cas si les paramètres de Q1 ou Q2 sont le plus proche possible des paramètres de P1 ou P2.
Ainsi, dans le premier cas on considèrera que seules les propositions du type Q1 suivant ont une pseudo-preuve aléatoire intéressante :

$Q1_A$: « Il existe un réel L>0 tel que $\lim_{k\to\infty}(\frac{f(k)}{F(k)})=L$ »

On pourra aussi considérer la proposition $Q1_B$ plus générale que $Q1_A$:
$Q1_B$: « Il existe 2 réels strictement positifs α et β et un naturel N tel que pour tout n supérieur à N, f(n)/F(n) appartienne à $[\alpha,\beta]$ »

Dans le 2ième cas on considèrera que seules les propositions du type Q2 suivantes ont une pseudo-preuve aléatoire intéressante :
Q2 : « Il existe 2 réels strictement positifs Ŭet ɓ, et il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t("\frac{f(i)}{F_A(i)}\in[\alpha,\beta]")\geq p-0.01$$

Il est évident que si de telles propositions sont illustrées par des tests, elles illustrent la validité avec une bonne approximation des modèles M1 ou M2, car elles sont très proches des propositions P1 ou P2 (à cause du paramètre qui est la fonction F(k)).

On peut aussi considérer que plus L est proche de 1, meilleure est la qualité du modèle M1, et plus Ŭet ɓ sont proches de 1, meilleur est la qualité du modèle M2. Pour exprimer ceci, on peut dans la proposition $Q1_A$ borner (au sens large) par un réel B1 la distance |L-1|, et dans la proposition Q2 ou Q1B borner par 2 réels B1 et B2 les distances |ɓ-1|+|Ŭ-1| et |ɓ-Ŭ|. On obtient alors les propositions notées $Q1_A$(B1) ,Q2(B1,B2) et $Q1_B$(B1,B2).
Il est évident que si $Q1_A$(B1) ou Q2(B1,B2) sont illustrées par des tests, plus B1 et B2 sont proches de 0, meilleure est illustrée la qualité des modèles M1 ou M2. En effet, P1 est exactement $Q1_A$(0) et P2 entraîne que Q2(B1,B2) est vraie pour tous réels B1,B2 strictement supérieurs à 0.
Si on obtient que de telles propositions du type Q1 ou Q2 précédent sont illustrées par des tests on peut sôattendre à ce quôen améliorant le modèle statistique permettant de les obtenir, on puisse obtenir des propositions beaucoup plus précises du type P1 ou P2 pour estimer la fonction f(k). Cela sera le cas dans lôétude de la fonction r(k).

Il est clair quõil peut exister à priori dõautres propositions que celles du type Q1 ou Q2 précédentes ayant une pseudo-preuve aléatoire et donnant une estimation dõune fonction f(k). Mais dans cet article, on ne considèrera que les propositions simples de ce type.

REMARQUE 4.A.7b) :

On peut, utilisant seulement la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1 quõon a démontrée, obtenir une estimation de la fonction S(n)du type de celles présentées dans le Chapitre précédent. On rappelle :

$$S(n)=\sum_{i=NA}^{n} f_A(i)$$

On suppose donc quõun ensemble A a une évaluation probabiliste p_{iA} pour i supérieur à N_A, et que Ɛp_{iA} diverge.

Appliquant le pseudo-Axiome 2.A.4 des variable indépendantes, on obtient que pour i supérieur à N_A, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire binaire $Xf_A(i)$, avec p(« $Xf_A(i)=1$ »)=p_{iA} et les $Xf_A(i)$ sont indépendantes.

Procédant alors comme dans la démonstration de la Loi faible des Grands Nombres généralisée 4.A.1, on obtient pour tout n supérieur à N_A:

$$p("(\frac{1}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \times \sum_{i=NA}^{n} Xf_A(i) - 1) \geq \varepsilon") \leq \frac{1}{\varepsilon^2 \sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}$$

On définit alors pour n supérieur à N_A la fonction Ů(n) :

$$\frac{1}{\varepsilon(n)^2 \sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} = 0.01$$

On remarque que ε(n) est une fonction positive tendant vers 0.

Alors, posant I(n)=[1-Ů(n),1+Ů(n)], la définition précédente de Ů(n) entraîne :

$$p("\frac{\sum_{i=NA}^{n} Xf_A(i)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \in I(n)") \geq 1-0.01=0.99$$

C'est-à-dire, dõaprès la définition de S(n) :

$$p("\frac{XS(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \in I(n)") \geq 0.99$$

Appliquant alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes aux variables aléatoires XS(n), on peut supposer quõelles sont indépendantes.

Définissant alors la variable aléatoire Y(n) :

$$Y(n)=t("\frac{XS(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}} \in I(n)")$$

On obtient, procédant exactement comme notre estimation de r(k) dans lõarticle précédent (5) (Chapitre 3.3) que la proposition suivante P2(S(n)) a une pseudo-preuve aléatoire :

P2(S(n)) : Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\frac{1}{n-N_A+1}\times\sum_{i=NA}^{n} t("\frac{S(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}\in I(n)")\geq 0.98$$

On est donc dans le 2ième cas de lŒtude théorique dûne fonction par la TAN 4A.7a).On peut donc obtenir les fonctions Q2(S(n)), ou Q2(S(n),B1,B2)) définie dans lŒtude théorique 4A7a), et donnant une estimation de S(n).

On voit cependant que la Loi Forte des Grands Nombres généralisée permet dôobtenir plus simplement le Théorème 4A.7, et permet dôobtenir la proposition suivante P1(S(n)) (Correspondant au premier cas de lŒtude théorique 4.A.7a)), qui est clairement plus intéressante car plus précise que la proposition précédente P2(S(n)) :

P1(S(n)) : « $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}\right)=1$

Si A et B sont 2 ensembles estimés dôestimation a(n) et b(n), on cherche à obtenir une évaluation probabiliste de Až B , ce qui permettra soit dôobtenir que la proposition « Až B est un ensemble estimé dôestimation i(n) (que lôon va déterminera) », soit la proposition « Až B est fini. » ont une pseudo-preuve aléatoire.

Pour obtenir un tel modèle statistique de Až B, on doit tout dôabord appliquer la pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A et à B, pour obtenir une évaluation probabiliste de A et de B. Puis, obtenant que A et B on une évaluation probabiliste p_{iA} (avec i supérieur à N_A) et p_{iB} (avec i supérieur à N_B), on applique le pseudo-Axiome de l*ôintersection des ensembles estimés suivant*, permettant dôobtenir une évaluation probabiliste de Až B :

PSEUDO-AXIOME 4.A.8 (de lôintersection des ensembles estimés-1ière forme) :

Si A et B sont 2 ensembles dô évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB}, avec respectivement i supérieur (au sens large) à N_A et i supérieur à N_B, alors lorsque le pseudo-Axiome de lôintersection des ensembles estimés 1ière forme est valide pour (A,B,I) ,(avec I=Až B), I est un ensemble dôestimation probabiliste $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B)$.

Nous allons donner 2 justifications intuitives à ce pseudo-Axiome :
On doit donc justifier quôavec les hypothèses précédentes pour A et B, « $f_I(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B)$.

1ière justification intuitive :
Cette première justification est basée sur le modèle équiprobable, introduit par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3. On rappelle que le premier article [(5)] était basé sur ce modèle équiprobable.
Supposons quôon ait un ensemble E={1,é .,n}.
Soient A et B deux sous-ensembles de E, pour lesquels on connaisse le nombre dôéléments a et b.
Dôaprès le pseudo-Axiome du modèle équiprobable appliqué à (i,A,E), i étant un élément de E, si on ignore si « i est élément de A » est vrai ou faux, alors la proposition « i est élément de A » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
De même, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (i,B,E), on obtient que la proposition « i est élément de B » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
f_A et f_B étant les fonctions caractéristiques de A et B, on a donc pour tout i dans E:
« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$, et
« $f_B(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b/n$.
Les 2 modèlisations précédentes sont donc analogues aux hypothèses du pseudo-Axiome, remplaçant E par lôensemble des naturels supérieurs à $N_I=\sup(N_A,N_B)$, et prenant $p_{iA}=a/n$ et $p_{iB}=b/n$.

Considérons maintenant lôensemble :
q $_{AB}$ ={(Aô,Bô), Aô et Bô sous-ensembles de E ayant respectivement a et b éléments}.
i étant un élément de E, on définit lôensemble :
I_{AB}(i)={(Aô,Bô) appartenant à q $_{AB}$, avec i appartient à Aô et Bô}
Si on applique alors le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à ((A,B),I_{AB}(i),q $_{AB}$), on obtient que « (A,B) est élément de I_{AB}(i) » est modélisée par lôévènement « (Aô,Bô) est élément de I_{AB}(i) » de lôespace équiprobable q $_{AB}$.
Remarquant que la proposition « (A,B) est élément de I_{AB}(i) » est équivalente à la proposition « i est élément de I (avec I=Až B) », et quôon obtient que Card(I_{AB}(i))/Card(q $_{AB}$)=ab/n^2=$p_{iA}p_{iB}$, on obtient :
« f_I(i) =1 » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iI}=$p_{iA}p_{iB}$, pour i appartenant à E.
Ceci constitue donc une première justification intuitive du pseudo-Axiome.

2^{ième} justification intuitive :
On suppose que A et B sont 2 ensembles quelconques parmi tous les ensembles dôévaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB} avec respectivement i supérieur à N_A et i supérieur à N_B.
On a donc, pour i supérieur à sup(N_A,N_B), « f_A(i)=1 » est modélisée par un évènement Ev_A(i) de probabilité p_{iA} et « f_B(i)=1 » est modélisée par un évènement Ev_B(i) de probabilité p_{iB}.
Puisque A et B sont quelconques dôévaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB}, il est évident que, i étant supérieur à N_I=sup(N_A,N_B) , la proposition « f_A(i)=1 » (qui est équivalente à « i est élément de A ») est totalement indépendante de la proposition « f_B(i)=1 » (qui est équivalente à « i est élément de B »).
Or on peut admettre intuitivement que si on a les modélisations :
« La proposition P1 est modélisée par lôévènement Ev1 » et « La proposition P2 est modélisée par lôévènement Ev2 », alors si P1 et P2 sont complètement indépendantes, on peut considérer que Ev1 et Ev2 appartiennent au même espace probabilisable et sont indépendants.

On obtient donc quôon peut considérer que Ev_A(i) et Ev_B(i) appartiennent au même espace probabilisable et sont indépendants.
Donc « f_I(i)=1 » (qui est équivalent à la proposition « f_A(i)=1 » et « f_B(i)=1 ») est modélisée par un évènement Ev_I(i) de probabilité $p_{iA}p_{iB}$, pour i supérieur à N_I=sup(N_A,N_B).

Souvent, on ne peut pas considérer que A et B sont 2 ensembles quelconques dôestimation a(n) et b(n), car on sait quôils appartiennent tous les 2 à un ensemble estimé C dôestimation c(n), avec a(n),b(n),c(n) connues.
On peut alors obtenir un modèle statistique bien meilleur quôen appliquant le pseudo-Axiome précédent de lôintersection des ensembles estimés 1^{ière} forme.
On emploie en effet alors le pseudo-Axiome de lôintersection des ensembles estimés 2^{ième} forme suivant :

PSEUDO-AXIOME 4.A.9 (de lôintersection des ensembles estimés 2^{ième} forme) :
Si A,B,C sont des ensembles ayant respectivement des évaluations probabilistes p_{iA},p_{iB},p_{iC}, pour i respectivement supérieur à N_A,N_B,N_C, alors, lorsque le pseudo-Axiome 4.A.9 de lôintersection des ensembles estimés 2^{ième} forme est valide pour (A,B,C,I) (avec I=Až B), I est un ensemble dôévaluation probabiliste p_{iI}=$p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$., pour i supérieur à N_I=sup(N_A,N_B,N_C).

Nous allons donner 2 justifications intuitives à la 2^{ième} forme de ce pseudo-Axiome qui sont analogues et généralisent celles de la 1^{ière} forme.
On doit donc justifier quôavec les hypothèses précédentes pour A,B et C « f_I(i)=1 » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iI}=$p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ pour i supérieur à sup(N_A,N_B,N_C).

1^{ière} justification intuitive :
Cette première justification est aussi basée sur le modèle équiprobable, introduit par le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3.
Supposons quôon ait toujours un ensemble E={1,é .,n}.
Soient A,B,C trois sous-ensembles de E, pour lesquels on connaisse le nombre dôéléments a,b et c, et tels que A et B soient inclus dans C.
Dôaprès le pseudo-Axiome du modèle équiprobable appliqué à (i,A,E), i étant un élément de E, si on ignore si « i est élément de A » est vrai ou faux, alors la proposition « i est élément de A » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}=a/n.
De même, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (i,B,E), on obtient que la proposition « i est élément de B » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iB}=b/n.

De même, « i est élément de C » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iC}=c/n.

f_A ,f_B et f_C étant les fonctions caractéristiques de A, B et C, on a donc pour tout i dans E:
-« f_A(i)=1 » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iA}=a/n.
-« f_B(i) =1 » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iB}=b/n.
-« f_C(i)=1 » est modélisée par un évènement de probabilité p_{iC}=c/n.
Les modélisations précédentes, ainsi que la proposition « A et B sont inclus dans C » sont donc analogues aux hypothèses du pseudo-Axiome, en remplaçant E par lôensemble des naturels supérieurs à sup(N_A,N_B,N_C) .

Considérons maintenant lôensemble :
q_{ABC} ={(Aô,Bô,Cô), Aô,Bô et Cô sous-ensembles de E ayant respectivement a, b et c éléments, avec Aô et Bô sont inclus dans Cô}.
i étant un élément de E, on définit lôensemble :
I_{ABC}(i)={(Aô,Bô,Cô) appartenant à q_{ABC}, avec i appartient à Aô et Bô(et donc à Cô)}
Si on applique alors le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à ((A,B,C),I_{ABC}(i),q_{ABC}), on obtient que « (A,B,C) est élément de I_{ABC}(i) » est modélisée par lôévènement « (Aô,Bô,Cô) est élément de I_{ABC}(i) » de lôespace équiprobable q_{ABC}.
Remarquant que la proposition « (A,B,C) est élément de I_{ABC}(i) » est équivalente à la proposition « i est élément de I (avec I=Až B) », et quôon obtient que Card(I_{ABC}(i))/Card(q_{ABC})=ab/nc=$p_{iA}p_{iB}$,/p_{iC} on obtient que pour i dans E :
« f_I(i) =1 » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iI}=p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$.
Ceci constitue une $1^{ière}$ justification intuitive de la $2^{ième}$ forme du pseudo-Axiome considéré.

$2^{ième}$ justification intuitive :
On considère que (A,B,C) est un triplet quelconque parmi tous les triplets (Aô,Bô,Cô) tels que Aô, Bô,Cô ont des évaluations probabilistes p_{iA},p_{iB},p_{iC}, pour i respectivement supérieur à N_A,N_B,N_C, et tels que Aôet Bô soient inclus dans Cô.
On a donc, pour i supérieur à N_I=sup(N_A,N_B,NC), « f_A(i)=1 » est modélisée par un évènement Ev_A(i) de probabilité p_{iA} ,« f_B(i)=1 » est modélisée par un évènement Ev_B(i) de probabilité p_{iB} , et « f_C(i)=1 » est modélisée par un évènement Ev_C(i) de probabilité p_{iC}.

On ne peut plus considérer que la proposition « i est élément de A » est indépendante de la proposition « i est élément de B », puisque A et B sont tous 2 inclus dans C. Cependant, il est clair que la proposition « i est élément de A » entraîne « i est élément de C », et de même pour la proposition « i est élément de B ».
Or il est logique intuitivement, si on a 2 modélisations « La proposition P1 est modélisée par lôévènement Ev1 » et « La proposition P2 est modélisée par lôévènement Ev2 », et que la proposition P1 entraîne la proposition P2, de considérer que Ev1 entraîne Ev2, c'est-à-dire que Ev1 et Ev2 appartiennent au même espace probabilisable et que Ev1 est inclus dans Ev2.
On peut donc considérer dôaprès ce qui précède, pour i supérieur à N_I, Ev_A(i),Ev_B(i) et Ev_C(i) appartiennent au même espace probabilisable et Ev_A(i) et Ev_B(i) sont inclus dans Ev_C(i).

De plus, généralisant le propriété de correspondance (utilisée pour définir le concept « *est modélisée* par »), on peut considérer que la proposition « « i est élément de A » sachant « i est élément de C » » est modélisée par lôévènement « Ev_A(i) sachant Ev_C(i) » (noté conventionnellement Ev_A(i)/Ev_C(i)).
De même, la proposition « « i est élément de B » sachant « i est élément de C » » est modélisée par lôévènement Ev_B(i)/Ev_C(i).
Or, C étant un ensemble dôévaluation probabiliste p_{iC} (i supérieur à N_C)quelconque, on peut considérer que A et B sont 2 sous-ensembles quelconques de C, dôévaluation probabiliste p_{iA} et p_{iB} (pour i supérieur à N_A et N_B).
On peut donc considérer que sachant « i est élément de C », alors la proposition « i est élément de A » est indépendante de la proposition « i est élément de B ».
Ceci sôécrit aussi:
La proposition « « i est élément de A » sachant « i est élément de C » » est indépendante de la proposition « « i est élément de B » sachant « i est élément de C » »
En appliquant la même remarque que pour la $2^{ième}$ justification intuitive de la première forme du pseudo-Axiome, on obtient que lôévènement Ev_A(i)/Ev_C(i) est indépendant de lôévènement Ev_B(i)/Ev_C(i).

Puisque $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ appartiennent au même espace probabilisable, on obtient donc :
« « $f_A(i)=1$ » et « $f_B(i)=1$ » » (qui est équivalente à « $f_I(i)=1$ ») est modélisée par l'évènement « $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ ».
Or dans l'espace probabilisable de $Ev_A(i),Ev_B(i)$, $Ev_C(i)$ on obtient :

$$p(Ev_A(i)etEv_B(i)) = p((Ev_A(i)etEv_B(i))/Ev_C(i))p(Ev_C(i))$$

$$p(Ev_A(i)etEv_B(i)) = p((Ev_A(i)/Ev_C(i))et(Ev_B(i)/Ev_C(i)))p(Ev_C(i))$$

$$p(Ev_A(i)etEv_B(i)) = \frac{p(Ev_A(i))}{p(Ev_C(i))} \times \frac{p(Ev_B(i))}{p(Ev_C(i))} \times p(Ev_C(i)) = \frac{p_{iA}p_{iB}}{p_{iC}}$$

où on a utilisé que $Ev_A(i)$ et $Ev_B(i)$ sont inclus dans $Ev_C(i)$, et que $Ev_A(i)/Ev_C(i)$ et $Ev_B(i)/Ev_C(i)$ sont indépendants.
On a donc donné une 2^{ième} justification intuitive du pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2^{ième} forme.

Nous allons maintenant présenter certains Théorèmes et notions importantes permettant d'obtenir des estimations de certains sous-ensembles de **N**.

DEFINITION 4.10 : (ensembles image- fonction ordonnée)
Si A est un sous-ensemble infini de **N*** et est l'image d'une fonction numérique $f_A(i)$, strictement croissante sur **N***, alors on dira que A est *l'ensemble image* de f_A sur **N***., et que f_A est une *fonction ordonnée* sur **N***.
(On pourrait généraliser cette définition en remplaçant **N*** par un sous-ensemble infini quelconque de **N***).

On remarque que si A est un sous-ensemble quelconque infini de **N***, on peut définir :
$f_A(1)$ comme le premier élément de A,
$f_A(2)$ comme le 2^{ième} élément de A
et pour tout n $f_A(n)$ est le n^{ième} élément de A.
Donc il existe toujours une fonction ordonnée f_A dont A est l'ensemble image (sur **N***).
Réciproquement, si A est l'ensemble image de f_A sur **N***, on a nécessairement :
$f_A(1)$ est le premier élément de A, et par une récurrence immédiate $f_A(n)$ est le n^{ième} élément de A.
On a donc le Théorème :

THEOREME 4.A.11 :
Pour tout sous-ensemble estimé A de **N***, il existe une et unique fonction f_A dont A est l'ensemble image sur **N***.

DEFINITION 4.A.12:
Si A est l'ensemble image d'une fonction f_A sur **N***, alors, pour toute fonction f_{Abij} de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}^+$, continue, strictement croissante, telle que $f_{Abij}(0)=0$ et pour tout i dans **N***, $f_{Abij}(i)=f_A(i)$, on dira que f_{Abij} est une *bijection (numérique) ordonnée* sur $\mathbf{R}^+$, et que A est l'ensemble image de la *bijection ordonnée* f_{Abij}. (Car il est évident que f_{Abij} est nécessairement une bijection).
Puisque f_{Abij} coïncide partout avec f_A sur **N***, on emploiera la même notation f_A pour désigner l'une ou l'autre fonction, sauf en cas d'ambiguïté.

REMARQUE 4.A.13 :
Il est évident que pour toute fonction f_A définie sur **N***, il existe une infinité de bijections f_{Abij} pouvant convenir. On verra en fait que seul le comportement à l'infini de f_{Abij} sera important pour déterminer l'estimation a(n) de l'ensemble A, et donc il suffira de connaître f_{Abij} (x) (noté aussi $f_A(x)$) pour x supérieur à un naturel quelconque N_A.

On a alors le Théorème important :

THEOREME 4.A.14 :
Si A est l'ensemble image d'une bijection ordonnée f_A sur $\mathbf{R}^+$ alors A est un ensemble estimé d'estimation $f_A^{-1}(n)$.
(Puisque f_A est strictement croissante et tend vers l'infini, il en est de même pour f_A^{-1})

Démonstration :

On rappelle que A(n) est lôensemble des éléments de A inférieurs à n.(On emploiera toujours les termes « inférieurs » ou « supérieurs » au sens large.)
Dôaprès lôhypothèse, tout élément de A sôécrit f_A(i), ou i appartient à **N***.
On a donc A(n)={f_A(i)/ f_A(i)Òn et i appartient à **N***}.
Or, f_A(i)Òn est équivalent à iÒf_A^{-1}(n), puisque f_A est une bijection strictement croissante .
Donc Card(A(n))=E(f_A^{-1}(n)), donc Card(A(n))åf_A^{-1}(n) pour n tend vers lôinfini ce qui signifie que A est un ensemble estimé dôestimation f_A^{-1}(n).

Si A est lôensemble image dôune bijection ordonnée f_A définie sur $\mathbf{R}^+$, dans de nombreux cas f_A^{-1} est très difficile à obtenir. Par contre, en général, on connaît une fonction g_A, à valeur dans $\mathbf{R}^{*+}$, strictement croissante définie pour x assez grand, continue, et telle que f_A soit équivalente à g_A à lôinfini et quôon connaisse g_A^{-1}, pour x assez grand.
On peut alors en général utiliser le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.15 :
Si f est une fonction strictement positive et continue, définie pour x supérieur à un réel strictement positif Kf, strictement croissante, telle quôil existe une fonction g strictement positive et continue, définie pour x assez grand (x supérieur à Kf), strictement croissante et que lôon ait:
(i)f est équivalente à g à lôinfini.
(ii)On connaît g^{-1}, et pour toute fonction Ů(x) tendant vers 0 à lôinfini :
g^{-1}(x(1+Ů(x)) est équivalente à g^{-1}(x) à lôinfini.
Alors f^{-1}(x) est équivalente à g^{-1}(x) à lôinfini.

Démonstration :
Puisque g est équivalente à f, pour x supérieur à Kf, on a une fonction Ů(x) tendant vers 0 pour x tend vers lôinfini avec : g(x)=f(x)(1+Ů(x)).
De plus pour x supérieur à Kf:
x=g^{-1}(g(x))=g^{-1}(f(x)(1+Ů(x))
Pour x supérieur à Kf, on pose f(x)=X. Donc x=f^{-1}(X).
On obtient, pour f^{-1}(X) supérieur à Kf, soit X supérieur à f(Kf) :
f^{-1}(X)=g^{-1}(X(1+Ů(f^{-1}(X))).
Donc :

$$\frac{g^{-1}(X(1+\varepsilon(f^{-1}(X))))}{f^{-1}(X)}=1$$

Pour montrer que f^{-1} est équivalente à g^{-1} à lôinfini, il suffit de montrer que :
g^{-1}(X(1+Ů(f^{-1}(X))) est équivalente à g^{-1}(X).
Ceci est vrai car f^{-1}(X) tend vers lôinfini pour X tend vers lôinfini et dôaprès (ii).
On a donc montré le Théorème.

La condition (ii) sera en général vérifiée, dans le cas où f est une fonction ordonnée sur **N***, car comme on le verra, les estimations sôexpriment comme fonctions simples des fonctions Log(x), x et de leurs puissances réelles. Il en sera de même en général de la fonction g^{-1}, et comme on a toujours, pour tout réel Ŭ et pour toute fonction Ů(x) tendant vers 0 à lôinfini, Log(x(1+Ů(x)))^{Ŭ} est équivalente à lôinfini à (Log(x))^{Ŭ}, et (x(1+Ů(x)))^{Ŭ} est équivalente à x^{Ŭ}, on aura en général g^{-1}(x(1+Ů(x))) est équivalente à g^{-1}(x) à lôinfini.

REMARQUE 4.A.16 :
Le Théorème précédent peut aussi être utilisé dans certains cas où on ne connaît pas de fonction g équivalente à f_A, connaissant g^{-1}, mais quôon peut encadrer f_A par de telles fonctions f_{A1} et f_{A2}, équivalentes à g_1 et g_2, et dont on connaît g_1^{-1} et g_2^{-1}.
En effet, supposant quôon ait une fonction f_A(x), et 2 fonctions f_{A1} et f_{A2} définies pour x assez grand et strictement positives, telles que f_{A1} et f_{A2} soient strictement croissantes ,tendent vers lôinfini et :
$f_{A2}(x)<f_A(x)<f_{A1}(x)$.
Remarquant que si f et g sont 2 fonctions strictement croissantes définies pour x supérieur (au sens large) à K, strictement positives, tendant vers lôinfini, telles que pour tout x supérieur ou égal à K : f(x)<g(x).
On obtient que f et g ont des fonctions réciproques f^{-1} et g^{-1} avec :

Pour f(x)supérieur à K :
$f^{-1}(f(x))<f^{-1}(g(x))$, soit $x<f^{-1}(g(x))$
Et pour $g^{-1}(x)$supérieur à K (c'est-à-dire x supérieur à g(K)) :
$g^{-1}(x)<f^{-1}(x)$.

Il en résulte que pour x assez grand :
$f_{A1}^{-1}(x)<f_A^{-1}(x)<f_{A2}^{-1}(x)$.
Si on a $f_{A1}(x)$ est équivalente à une fonction $g_1(x)$ et $f_{A2}(x)$ est équivalente à une fonction $g_2(x)$ telles quôon puisse dans les 2 cas appliquer le Théorème précédent et que de plus, à lôinfini
$g_2^{-1}(x)$ soit équivalente à $g_1^{-1}(x)$, on obtient alors $f_A^{-1}(x)$ est équivalente à lôinfini à $g_1^{-1}(x)$.

Par exemple considérons la fonction ordonnée sur **N*** :
$f_A(n)=E(\exp(n)+\mathrm{Log}(n)+n^{1/2})$.

Il est évident quôon peut définir une bijection ordonnée sur $\mathbf{R}^+$ $f_{Abij}(x)$ coincidant avec f_A sur **N***. On suppose que f_{Abij} est lôune de ces bijections ordonnées.
Il est difficile de trouver une fonction g(x) équivalente à $f_{Abij}(x)$, car $f_A(n)$ nôest pas équivalente à $f_A(n+1)$.
Par contre on peut définir :
$f_{A2}(x)=\exp(x-2)+\mathrm{Log}(x-2)+(x-2)^{1/2}$.
$f_{A1}(x)=\exp(x+2)+\mathrm{Log}(x+2)+(x+2)^{1/2}$
On obtient alors, pour x assez grand :
$f_{A2}(x)<f_{Abij}(x)<f_{A1}(x)$.

On obtient lôexpression précédente remarquant que pour n supérieur à 5, si on considère lôintervalle I(n)=[n-1,n], dôaprès la définition de f_{Abij}, on a pour tout x dans I(n), $f_A(n-1)$ est inférieur (au sens large) à $f_{Abij}(x)$ qui est inférieur à $f_A(n)$.
Or il est évident, dôaprès lôexpression de $f_A(n)$, que pour tout x dans I(n), on a $f_{A2}(x)<f_A(n-1)$ et $f_{A1}(x)>f_A(n)$.
On obtient donc lôexpression précédente , pour x supérieur à 5.

Appliquant le Théorème précédent A.15 , on obtient que f_{A1}^{-1} est équivalente à la fonction $g_{A1}^{-1}(x)$, $f_{A2}^{-1}(x)$ est équivalente à $g_{A2}^{-1}(x)$, avec $g_{A1}^{-1}(x)$ et $g_{A2}^{-1}(x)$ équivalentes à Log(x).
On en déduit donc $f_{Abij}^{-1}(x)$ est équivalente à Log(x).

REMARQUE 4.A.17 :
Il est clair que si A est un ensemble estimé dôestimation a(n), on peut trouver une infinité dôautres estimations de A, qui sont toutes les fonctions équivalentes à a(n) et qui peuvent être très compliquées. Lôintérêt de la TAN et quôon ne considère que les expressions les plus simples de a(n), parce que ce sont elles les plus régulières et quôelles sont celles susceptibles de donner les meilleurs modèles statistiques.
Ainsi , on dira quôune fonction dôestimation a(n) est *régulière* si on a :
a) a(x) est infiniment dérivable pour x assez grand.
b)Toutes les dérivées de a(x) sont monotones pour x assez grand, et aô(x) inférieur à 1 pour x assez grand. De plus p_{iA}=a(i) ï a(i-1) est équivalente à aô(i) à lôinfini.
c)a(x) est une fonction simple des fonctions x, Log(x) et de leurs puissances réelles.

En général, les estimations les plus simples sont *régulières* pour les raisons suivantes :
On remarque que le fait quôen général, la dérivée aô(x) dôune estimation est inférieure à 1 est dû au fait quôon a(n)-a(n-1)=aô(x), avec x dans [n-1,n], quôon a en général a(n)-a(n-1) est inférieur à 1 et que la fonction aô(x) est monotone pour x assez grand.
Une conséquence de ceci est quôen général a(x) nôest pas fonction de exp(x), dont la dérivée tend vers lôinfini à lôinfini. De même, a(x) ne doit pas sôexprimer avec des parties entières, car alors a) ne serait plus vérifié.
Côest pourquoi on peut et on doit être dans le cas c).
Le fait que a(x) est une fonction simple des fonctions x et Log(x), et que a(i)-a(i-1)=aô(x) où x appartient à [i-1,i], entraîne que a(i)-a(i-1) est équivalente à aô(i).(Côest-à-dire le b))

Si a(n) est une fonction régulière, dôaprès c) aô(x) est aussi fonction simple des fonctions x et Log(x), de même que la dérivée de a(x) à tout ordre.
Considérons un ensemble estimé A dôestimation a(n) et b(n), avec a(x) est donc équivalente à b(x) et de plus a(x) et b(x) sont des fonctions dôestimation régulières.

Montrons que si on a p_{iA}=a(i)-a(i-1) et p_{iB}=b(i)-b(i-1), on a en général p_{iA} est équivalente à p_{iB} à lõinfini.

En effet dõaprès b), p_{iA} est équivalente à aõ(i) et p_{iB} est équivalente à bõ(i). aõ(x) et bõ(x) étant monotone pour x assez grand, il suffit donc de montrer que aõ(x) est équivalente à bõ(x) à lõinfini.

Or dõaprès c), la fonction r(x)=aõ(x)/bõ(x) est aussi une fonction simple des fonctions Log(x) et x, de même que sa dérivée rõ(x). Il en résulte que rõ(x) est équivalente à lõinfini à une fonction strictement positive ou strictement négative, et donc r(x) est monotone pour x assez grand et donc r(x) a une limite l, éventuellement infinie.

Montrons que cette limite l est nécessairement égale à 1 :

En effet, supposons l>1.

Donc il existe Ů>0, tel quõil existe K>0 tel que pour tout t supérieur à K, r(t)>1+Ů, c'est-à-dire :aõ(t)>bõ(t)(1+Ů).

En intégrant entre K et x, x étant supérieur à K, on obtient :

a(x)-a(K)>(1+Ů)(b(x)-b(K)).

Et donc pour x supérieur à K:

a(x)/b(x)>1+Ů+a(K)/b(x)-(1+Ů)b(K)/b(x).

Il est évident que le $2^{ième}$ terme de cette inégalité tend vers 1+Ů>0, et est incompatible avec lõhypothèse que a(x)/b(x) tend vers 1 pour x tend vers lõinfini.

Il est donc impossible qu-on ait l>1, et de même on montre quõil est impossible quõon ait l<1. Donc l=1, et on a bien p_{iA} est équivalente à p_{iB}.

Le résultat précédent est important car A, B, C étant 3 ensembles estimés, appliquant le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A,B,C puis le pseudo-Axiome de lõintersection des ensembles estimés, on obtient des résultats équivalents quels que soient les fonctions dõ estimation utilisées de A,B,C, du moment quõelles soient régulières.

Pour obtenir la remarque précédente, on utilise le résultat important que si a(n), b(n), c(n) sont des estimations régulières, avec p_{iA}=a(i)-a(i-1), p_{iB}=b(i)-b(i-1), p_{iC}=c(i)-c(i-1), alors la convergence à lõinfini de la série Ė$p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ est équivalente à la convergence à lõinfini de lõintégrale Úaõ(x)bõ(x)/cõ(x)dx, et de plus si elles divergent, on a pour tout naturel N :

$$\int_N^n \frac{a'(x)b'(x)}{c'(x)}dx \approx \sum_{i=N}^{n} \frac{p_{iA}\,p_{iB}}{p_{iC}}\,.$$

On utilisera aussi le fait que si f et g sont 2 fonctions strictement positives et monotones, définie pour x supérieur à K, avec f équivalente à g en lõinfini, alors la convergence à lõinfini de lõintégrale Úf est équivalente à celle de lõintégrale Úg, et si elles divergent :

$$\int_K^x f(t)dt \approx \int_K^x g(t)dt$$

En utilisant exactement la même méthode que dans la partie 3.DECIMALES dõ IRRATIONELS , pour obtenir que la proposition « Il existe une infinité de chiffres égaux à 5 dans les décimales de ã3 », considérant en particulier les mêmes ensembles F_i, on obtient le Théorème suivant :

THEOREME 4.A.18 :
Si on a un ensemble A dõévaluation probabiliste p_{iA}, pour i supérieur à N_A, alors :
a)Si la série Ėp_{iA} diverge, la proposition « A a une infinité dõéléments » a une pseudo-preuve aléatoire.
b)Si la série Ėp_{iA} converge, la proposition « A a un nombre fini dõéléments » a une pseudo-preuve aléatoire.

On rappelle que dans le cas a), le Théorème 4.A.7 permet dõobtenir que A est un ensemble estimé dont on obtient une estimation a(n) par une pseudo-preuve aléatoire.

B.EXEMPLES

EXEMPLE 4.B.1 :
Soit à étudier lõensemble I des nombres premiers pouvant sõécrire $k=10^p+3$.

On va montrer que les 2 propositions P1 :« I est infini » et P2 :« Si I est un ensemble estimé dôestimation $i(n) = F(n) = \int_{10}^{n} \frac{2}{xLog(x)Log(10)} dx.$ » ont des pseudo-preuves aléatoires.

Il faudrait effectuer des tests en calculant pour de nombreuses valeurs r(n)=I(n)/i(n) (I(n) étant le nombre dôéléments de I inférieurs à n), et vérifier que r(n) semble tendre vers 1, pour obtenir que P1 et P2 ont des explications aléatoires intéressantes c'est-à-dire illustrées par de nombreux tests, à condition que ni P1, ni P2, ni leur négation nôaient été démontrées classiquement.

Démonstration :
(On ne démontre pas les propositions P1 et P2, mais on démontre quôelles ont des pseudo-preuves aléatoires.)
Soit A lôensemble des naturels k sôécrivant :$k=10^p+3$, avec p dans **N***.
A est donc lôensemble image de la fonction ordonnée sur **N*** $f_A(p)=10^p+3$.
On peut alors définir la fonction f_{Abij}, continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$, avec pour x supérieur à 1, $f_{Abij}(x)=10^x+3$. f_{Abij} est donc une bijection ordonnée coïncidant avec f_A sur **N*** telle quôon lôa définie en 4.A.12, et donc quôon désignera aussi par f_A.
On obtient pour k supérieur à 10+3=13, si $f_A(x)=k$, $f_A^{-1}(k)= x = \log(k-3)$, donc dôaprès le Théorème 4.A.14, A est un ensemble estimé dôestimation a(k)=log(k).
Si B est lôensemble des nombres premiers, on sait que B est un ensemble estimé dôestimation b(k)=k/Log(k).
De plus, A et B sont inclus dans C lôensemble des nombres impairs qui est un ensemble estimé dôestimation c(k)=k/2.
Si on applique le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A,B,C, on obtient que A,B,C ont des évaluations probabilistes $p_A(i)=a(i)-a(i-1)$, $p_B(i)=b(i)-b(i-1)$, $p_C(i)=c(i)-c(i-1)$, pour i supérieur (respectivement) à N_A,N_B,N_C.
Il en résulte, si on applique le pseudo-Axiome de lôintersection des ensembles estimés 2ième forme 4.A.9, I étant lôintersection de A et B, I a une évaluation probabiliste $p_I(i)=p_A(i)p_B(i)/p_C(i)$, pour i supérieur à $N_I=\sup(N_A,N_B,N_C)$.

On obtient:
$$\frac{a'(x)b'(x)}{c'(x)} = \frac{2}{xLog(10)} \times \frac{Log(x)-1}{(Log(x))^2}$$
Comme lôintégrale Ú2/(xLog(10)Log(x) dx est équivalente à une intégrale de Bertrand qui diverge, il en résulte dôaprès la Remarque 4.A.17 que la série É$p_{iA}p_{iB}/p_{iC}$ diverge et que de plus :
$$\sum_{i=NI}^{n} \frac{p_{iA}p_{iB}}{p_{iC}} \approx \int_{NI}^{n} \frac{2}{xLog(x)Log(10)} dx$$

On peut alors utiliser le Théorème 4.A.18 pour obtenir que P1 : « I est infini » a une pseudo-preuve aléatoire.
Si on applique le Théorème 4.A.7, on obtient que la proposition :
« I est un ensemble estimé dôestimation $i(n) = \sum_{i=NI}^{n} p_{iI}$ »
a une pseudo-preuve aléatoire.
On obtient alors immédiatement que cette proposition est équivalente à P2, et donc P2 a bien une pseudo-preuve aléatoire.

EXEMPLE 4.B.2 :
Etudions maintenant lôensemble des nombres premiers pouvant sôécrire $k=2x^r+1$, où r est un naturel supérieur à 2.
On obtient exactement les mêmes résultats que précédemment, avec ici :
$$F(n) = \int_{10}^{n} \frac{2^{1-1/r}}{rx^{1-1/r}Log(x)} dx$$

On procède exactement comme dans lôexemple précédent, avec $a(k)=k^{1/r}/2^{1/r}$, b(k) et c(k) demeurant inchangés. Comme dans lôexemple précédent, il faudrait calculer et tracer I(n)/F(n) pour vérifier que P2 est illustrée par de nombreux tests et donc a une explication aléatoire intéressante, si on ne lôa jamais démontrée classiquement ni sa négation.

EXEMPLE 4.B.3 :
Etudions lôensemble des nombres premiers pouvant sôécrire $k=6.10^p+1$.
On obtient les mêmes résultats que pour les 2 premiers exemples, avec ici :

$$F(n)=\int_{10}^{n}\frac{24}{xLog(x)Log(10)N_C}dx$$

où N_C est le nombre de naturels modulo 24 dont le carré est égal à 1 modulo 24.

Pour obtenir les résultats de cet Exemple, on obtient comme dans le premier exemple que A est un ensemble estimé dôestimation a(k)=log(k).
Lôensemble B et lôestimation b(k) restent inchangés ;
Cependant, on remarque que les éléments de A et de B peuvent sôécrire ã(24n+1) où n est un naturel.
On doit donc prendre pour C lôensemble des naturels k=ã24n+1.
Pour obtenir c(k), on considère la table des carrés modulo 24, si N_C est le nombre de naturels dont le carré est égal à 1 (modulo 24), il est évident que $c(k)=k(N_C/24)$.
On procède alors comme précédemment pour obtenir la propositions « I est infini » et la proposition donnant lôestimation i(n) de I.

EXEMPLE 4.B.4 :
Etudions lôensemble des nombres premiers pouvant sôécrire : $k=24x^r+1$, r étant un naturel supérieur à 2.
On obtient les mêmes résultats que pour les exemples précédents, avec :

$$i(n)=F(n)=\int_{10}^{n}\frac{24^{1-1/r}}{rx^{1-1/r}Log(x)N_C}dx$$

Pour obtenir ces résultats, on procède comme dans lôExemple précédent, en conservant b(k) et c(k), et en prenant $a(k)=(k/24)^{1/r}$.

REMARQUE 4.B.5:

Il est clair que les pseudo-Axiomes de la TAN que nous avons donné permettent aussi dôétudier lôintersection dôun nombre dôensembles estimés arbitraire, en donnant des estimations de ces ensembles estimés.

Dans les exemples précédents, on a proposé seulement des intersections infinies, car ce sont les seules qui peuvent être illustrées par des tests et donc ont les explications aléatoires les plus intéressantes. Il est cependant clair quôon aurait pu proposer de nombreux exemples où le fait que lôintersection de 2 ensembles estimés est finie a une explication aléatoire.

Il nôest pas sûr en outre que les propositions des exemples précédents aient des explications aléatoires car il est possible quôon puisse les démontrer classiquement ou leurs négations. On rappelle que par Définition seules les propositions qui nôont pas de démonstration classique ni leur négation ont une explication aléatoire. Car sinon, leur pseudo-preuve aléatoire est inutile.

On peut donc sôattendre que comme dans les exemples précédents, de très nombreuses propositions en Théorie des Nombres aient une explication aléatoire, et donc tout en ayant une explication rationnelle basée sur le hasard nôaient pas de démonstration classique ni leur négation.

A et B étant 2 ensembles estimés, on peut obtenir dans certains cas un autre modèle de la fonction caractéristique $f_I(i)$, avec I=Až B.

Ainsi, supposons que A soit lôimage dôune fonction ordonnée g_A sur **N***, et que B soit un ensemble estimé dôestimation b(n).

Si on applique à B le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés, on obtient quôil existe un naturel N_B tel que pour i supérieur à N_B, $f_B(i)=1$ soit modélisée par un évènement de probabilité $p_{iB}=b(i)-b(i-1)$ (f_B étant la fonction caractéristique de B).

On obtient alors immédiatement la modélisation :

« Pour j tel que $g_A(j)$ soit supérieur à N_B, $f_I(g_A(j)=1$ (qui est équivalent à $f_B(g_A(j))=1$) est modélisée par un évènement de probabilité $p_{gA(j)I}=p_{gA(j)B}=b(g_A(j))-b(g_A(j)-1)$. »
(Il est évident que si i ne sôécrit pas $g_A(j)$ pour un naturel j, alors $f_I(i)=f_A(i)=0$, f_A fonction caractéristique de A).

Cette 2^{ième} modélisation est plus précise que celle obtenue en appliquant le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A et B, puisque dans cette 2^{ième} modélisation, on ne modélise pas f_A la fonction caractéristique de A, mais on lôutilise directement. Cependant, cette 2^{ième} modélisation conduit à des estimations de I équivalentes à celles obtenues par la 1^{ière} modélisation , si b(x) est une fonction régulière et que , g_{Abij} étant une bijection ordonnée de classe C^2 sur $\mathbf{R}^+$ associée à g_A (qui existe toujours de façon évidente) $g_A^{-1}(x)$ (qui on le rappelle donne une estimation de A) est équivalente à une fonction régulière.

EXEMPLE 4.B.6 :

On peut donner une explication aléatoire à la Conjecture de Goldbach, et à des propositions exprimant des propriétés de la Conjecture de Goldbach, en utilisant la modélisation des ensembles estimés présentée dans cet article, et non plus le modèle équiprobable comme dans lôarticle [(5)]. Il est possible que cette 2^{ième} modélisation conduise, en étant éventuellement affinée, à des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach plus précises que celles obtenues en utilisant le modèle équiprobable.

ETUDE DE r(k) PAR LE MODELE SIMPLE MI 4.B.6A) :

Soit A lôensemble des nombres premiers. On sait que A est un ensemble estimé dôestimation a(n)=n/Log(n).

Si on applique le pseudo-Axiome du modèle des ensembles estimés à A, on obtient quôil existe un naturel N_A tel que pour i supérieur (toujours au sens large si on ne précise pas) à N_A, « $f_A(i)=1$ » soit modélisée par un évènement « $Xf_A(i)=1$ » de probabilité $p_{iA}=a(i)-a(i-1)$. (f_A fonction caractéristique de A) On sait quôon peut appliquer ce pseudo-Axiome en choisissant N_A assez grand, et on choisira $N_A=501$.

On obtient :

$$p_{iA} = \frac{i}{Log(i)} - \frac{i-1}{Log(i-1)} = \frac{1}{Log(i)}(1+\varepsilon(i))$$

Où la fonction Ů(i), complètement déterminée, tend vers 0 pour i tend vers lôinfini. (On rappelle quôune estimation plus précise de a(n) est Ú$_{[3,n]}$ (1/Log(x))dx, qui donne la même expression)
On a donc la loi numérique aléatoire :
« Pour i supérieur à $N_A=501$, $f_A(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_A(i)$, avec p(« $Xf_A(i)=1$ »)=p_{iA} ».
Cependant, comme tous les nombres premiers sont impairs, on peut considérer seulement les naturels i impairs. On obtient alors un meilleur modèle statistique:
Ainsi, considérons 2 ensembles estimés A et C, avec A inclus dans C, et pour i appartenant à C, on cherche à modéliser $f_A(i)=1$, que lôon écrira $f_{A/C}(i)=1$. On cherche donc à modéliser $f_{A/C}(i)$.

On lôobtient par le pseudo-Axiome suivant, de lôinclusion des ensembles estimés, qui se justifie de la même façon que le pseudo-Axiome de lôintersection des ensembles estimés 2^{ième} forme:

Pseudo-Axiome 4.B .6.Aa) de lôinclusion des ensembles estimés :

Si A et C sont 2 ensembles dôestimation probabiliste p_{iA} et p_{iC}, pour i supérieur à N_A et N_C (On suppose $N_A=N_C$), avec A inclus dans C, alors lorsque le pseudo-Axiome de lôinclusion des ensembles estimés est valide pour (A,C), pour tout i dans C, $f_A(i)$ (notée $f_{A/C}(i)$ est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA/C}=p_{iA}/p_{iC}$.

1^{ière} justification intuitive :
Cette justification est basée sur le modèle équiprobable :
Supposons quôon ait un ensemble E={1,..,n}, et que A et C soient 2 sous-ensembles de E ayant a et c éléments, avec A inclus dans C.
Appliquant le pseudo-Axiome du modèle équiprobable 2.A.3 à (i,A,E) puis à (i,C,E), on obtient pour i dans E :
« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iA}=a/n$.
« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité $p_{iC}=c/n$.

Si maintenant, sachant i appartient à C, on applique le pseudo-Axiome du modèle équiprobable à (i,A,C) (car A est inclus dans C par hypothèse), on obtient :
« $f_{A/C}(i)=1$ » est modélisée par un évènement de probabilité a/c, avec $a/c=p_{iA}/p_{iC}$.
Ceci est donc une première justification.

2ième justification intuitive :
Supposons que (A,C) soit un couple d'ensembles quelconques parmi tous les couples (A',C') tels que A' et C' sont 2 ensembles d'évaluation probabiliste p_{iA} et p_{iC} pour i supérieur à N_A, et A' est inclus dans C'.
On a donc pour i supérieur à N_A :
« $f_A(i)=1$ » est modélisée par un évènement Ev_{iA} de probabilité p_{iA}.
« $f_C(i)=1$ » est modélisée par un évènement Ev_{iC} de probabilité p_{iC}.
De plus comme dans la 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome de l'intersection des ensembles estimés 2ième forme, on peut en premier lieu considérer puisque A est inclus dans C que Ev_{iA} et Ev_{iC} appartiennent au même espace probabilisable et de plus que Ev_{iA} est inclus dans Ev_{iC}, pour i supérieur à N_A.
On peut aussi en second lieu généraliser la propriété de correspondance, en admettant que la proposition « « $f_A(i)=1$ » sachant « $f_C(i)=1$ » » est modélisée par l'évènement « Ev_{iA} sachant Ev_{iC}. (Ev_{iA}/Ev_{iC}).
Or la proposition « « $f_A(i)=1$ » sachant « $f_C(i)=1$ » » est équivalente à « $f_{A/C}(i)=1$ » tel qu'on a défini $f_{A/C}(i)$.
Il en résulte que « $f_{A/C}(i)=1$ » est modélisée par l'évènement Ev_{iA}/Ev_{iC} de probabilité p_{iA}/p_{iC}.
On a donc donné une 2ième justification intuitive du pseudo-Axiome.

I étant l'ensemble des naturels impairs, puisque A est inclus dans I, appliquant le pseudo-Axiome précédent à (A,I), on obtient que pour i naturel impair supérieur à 501, $f_{A/I}(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I}(i)$ avec p(« $Xf_{A/I}(i)=1$ »)=$p_{iA/I}=p_{iA}/p_{iI}=2p_{iA}$. (avec $p_{iI}=1/2$).

Si on applique le pseudo-Axiome des variables indépendantes on obtient la même loi numérique aléatoire, mais avec des variables $Xf_{A/I}(i)$ définies sur le même espace probabilisable et indépendantes.

Si on définit pour tout n pair (n=2p) la proposition :
P(n) : « n=2p est la somme de 2 nombres premiers (distincts) »,
On considère les naturels n=2p, avec p supérieur à N_A=501.
Il est évident alors que « t(P(n)=0 » est équivalente à :
« $f_{A/I}(1)f_{A/I}(n-1)=0$ » et « $f_{A/I}(3)f_{A/I}(n-3)=0$ »eté .et « $f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')=0$ »,
où p' est le plus grand naturel impair strictement inférieur à p.
On écrit cette proposition :
« $f_{A/I}(1)f_{A/I}(n-1)=0$ » eté et « $f_{A/I}(499)f_{A/I}(n-499)=0$ » et « $f_{A/I}(N_A)f_{A/I}(n-N_A)=0$ » et ...et « $f_{A/I}(p')f_{A/I}(n-p')=0$ »

La proposition précédente fait intervenir des naturels n-j avec j inférieur à p' (2ième terme de chaque produit).
Il en résulte n-j est supérieur à n-p'=2p – p'>p. (puisque par hypothèse p' est strictement inférieur à p). Donc comme p est supérieur à N_A=501, n-j est toujours supérieur à N_A, et donc $f_{A/I}(n-j)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I}(n-j)$.

D'après la propriété de correspondance (donnée dans les Rappels 2.A), la proposition précédente équivalente à t(P(n))=0 est donc modélisée par l'évènement « Xt(P(n))=0 » de probabilité :
« $f_A(1)Xf_{A/I}(n-1)=0$ »eté et « $f_A(499)Xf_{A/I}(n-499)=0$ »et « $Xf_{A/I}(N_A)Xf_{A/I}(n-N_A)=0$ »eté et « $Xf_{A/I}(p')Xf_{A/I}(n-p')=0$ ».
Et donc utilisant que les $Xf_{A/I}(i)$ sont indépendantes, la probabilité de l'évènement précédent est égal au produit des probabilités de chaque évènement. Si on définit $P(N_A)$ l'ensemble des nombres premiers strictement inférieurs à N_A, on a pour tout i strictement inférieur à N_A, si i est dans $P(N_A)$, $f_A(i)=1$, sinon $f_A(i)=0$, et donc la probabilité de l'évènement précédent est égale à :

$$p("Xt(P(n))=0")=\prod_{j\in P(NA)}(1-p_{jA/I})\prod_{p'\geq j\geq NA}(1-p_{jA/I}\,p_{(n-j)A/I})$$

(j représente toujours un naturel impair dans l'expression précédente).

On a donc obtenu la loi numérique aléatoire :
« Pour n=2p supérieur à $2N_A$=1002, t(P(n)) est modélisée par la variable aléatoire Xt(P(n)) définie précédemment ».
Si on applique le pseudo-Axiome des variables indépendantes à la loi précédente, on obtient la même loi avec les Xt(P(n)) indépendantes.
On peut alors en procédant exactement comme dans l'article (5) obtenir que la proposition :

« Pour tout n naturel pair supérieur à 1002, n est la somme de 2 nombres premiers distincts », qui est équivalente à « Pour tout n pair supérieur à 1002, t(P(n))=1 », a une pseudo-preuve aléatoire. Et il est évident que cette proposition est équivalente à la Conjecture de Goldbach.
(Puisquôn vérifie que pour n pair inférieur à 1002, n est la somme de 2 nombres premiers).

Avec toujours n=2p naturel pair tel que p supérieur à N_A=501, on définit r(n) comme étant le nombre de paires de nombres premiers distincts dont la somme donne n.
On obtient :
$r(n)=f_A(1)f_{A/I}(n-1)+$é $+f_A(499)f_{A/I}(n-499)+f_{A/I}(N_A)f_{A/I}(n-N_A)+..+f_{A/I}(p$ô$)f_{A/I}(n-p$ô$)$.

Or on a vu dans les Rappels 2.A, comme conséquence de la propriété de correspondance, que si on avait une loi numérique aléatoire sur un ensemble F :
« f(i) est modélisée par la variable aléatoire Xf(i) »,
alors si les Xf(i) sont définies sur le même espace probabilisable, pour tous k1,é ,kn appartenant à F, et pour toute fonction $G(x_1,$é $.x_n)$ définie sur $\mathbf{R}^n$, la fonction G(f(k1),é ,f(kn)) était modélisée par la variable aléatoire G(Xf(k1),é ,Xf(kn).

Il en résulte que la fonction r(n) est modélisée par la variable aléatoire Xr(n),avec :

$$Xr(n) = \sum_{j \in P(NA)} Xf_{A/I}(n-j) + \sum_{p' \geq j \geq NA,\, j \in I} Xf_{A/I}(j)Xf_{A/I}(n-j)$$

On obtient donc la loi numérique aléatoire :
« Pour n pair supérieur à $2N_A$=1002, r(n) est modélisée par la variable aléatoire Xr(n) définie précédemment ».
On remarque quôn peut facilement obtenir la moyenne et la variance de Xr(n), les $Xf_{A/I}(j)$ étant indépendantes. On peut aussi appliquer le pseudo-Axiome des variables indépendantes pour obtenir la même loi que précédemment, mais avec les Xr(n) indépendantes, et obtenir alors des propositions exprimant des propriétés de la Comète de Goldbach.
On remarque tout dâbord quôn peut montrer que E(Xr(k)) est équivalente à $E(X_{eq}r(k))$, $X_{eq}r(k)$ étant la variable aléatoire obtenue utilisant le modèle équiprobable modélisant r(k) dans le premier article, c'est-à-dire que E(Xr(k)) est équivalente à $k/(Log(k))^2$.
Utilisant lôinégalité de Chebychev exactement de la même façon que dans la Remarque 4.A.7b), on peut obtenir des intervalles de confiance à 99% I(k)=[1-Ů(k),1+Ů(k)] de Xr(k)/E(Xr(k)), Ů(k) étant une fonction positive tendant vers 0.
Procédant alors exactement comme dans lôestimation de r(k) dans lôarticle précédent [(5)] (Chapitre 3.3), on obtient que la proposition suivante $P2_{MI}(r(k))$ a une pseudo-preuve aléatoire :
$P2_{MI}(r(k))$: « Il existe un naturel N tel que pour tout n supérieur à N :

$$\frac{1}{(n-2N_A)/2+1} \times \sum_{i=2NA}^{n} t\left(\text{"}\frac{r(i)}{E(Xr(i))} \in I(i)\text{"}\right) \geq 0.98$$ (avec i pair et $E(Xr(i)) \approx i/(Log(i))^2$)

On est donc exactement dans le même cas que le modèle équiprobable de lôarticle précédent [(5)],(où on avait obtenu dans le Chapître 3.3 la proposition $P2_{eq}(r(k))$) on obtient que MI nôest pas valide avec une suffisamment bonne approximation pour que la proposition précédente $P2_{MI}(r(k))$ quôil entraîne soit vraie. Cependant, comme dans le modèle équiprobable, le modèle indépendant MI donne une explication théorique à lôaspect de la Comète de Goldbach, côest à dire au fait quôelle soit délimitée par des courbes dôéquation de la forme $y(k)=Ak/(Log(k))^2$.

On remarque quôil est très possible à priori quôon puisse obtenir des variables aléatoires Xr(n) représentant les propriétés statistiques de r(n) de façon beaucoup plus précises que celles obtenues dans les modèles équiprobables et indépendants exposés précédemment. Cependant, ceci doit nécessiter dôutiliser des propriétés des nombres premiers plus complexes que les 2 seules quôon a utilisées, c'est-à-dire que les nombres premiers constituent un ensemble estimé dôestimation n/Log(n) inclus dans lôensemble des naturels impairs. Trouver une loi numérique aléatoire dont on puisse déduire les principales propriétés de la Comète de Goldbach, constitue lôobjectif suivant de la TAN, comme on lôa remarqué dans lôEtude théorique dôune fonction par la TAN 4.A.7a).

ETUDE DE LA FONCTION r(k) PAR LE MODELE MI(k)´ $(p_1,$é $,p_n)$ 4.B.6B)

On remarque quôon peut grandement améliorer la qualité des modèles présentés, indépendants et équiprobable, de la façon suivante :

On a vu quôon a amélioré la qualité du modèle indépendant en utilisant que A lôensemble des nombres premiers était inclus dans I lôensemble des nombres impairs.
Plus généralement, supposons quôon ait un naturel pair k, et que p_{1k},é .,p_{nk} soient les diviseurs premiers de k autres que 2 et k/2 (si k/2 premier), avec p_{1k}<é <p_{nk}. On peut alors considérer que A est inclus dans lôensemble I´(p_{1k},é ,p_{nk}) qui est lôensemble des naturels impairs qui ne sont pas multiples de p_{1k},é p_{nk}, à lôexception de p_{1k},é ,p_{nk} eux-mêmes. On remarque quôon a toujours p_{ik}<k/2. Afin de simplifier le modèle, on pourrait considérer seulement les nombres premiers p_{ik} inférieurs à P=500. (Il est très possible quôon obtienne un bon modèle prenant P égal à une valeur beaucoup plus petite que 500).

Remarquant que si j appartient à I´(p_{1k},..,p_{nk}), avec j>500, on a alors k-j appartient à I´(p_{1k},é ,p_{nk}), on peut procéder exactement comme dans le modèle indépendant précédent, remplaçant I par I´(p_{1k},é ,p_{nk}). Il est clair que cette modélisation est plus précise, et quôelles conduit aussi à lôexistence de bandes correspondant aux naturels pairs ayant certains diviseurs premiers en commun. Il est cependant très possible que cette modélisation ne soit pas assez précise pour décrire complètement ou avec une très bonne approximation les propriétés de la Comète de Goldbach.

(On peut affiner le modèle équiprobable étudié dans lôarticle précédent [(5)] de la même façon, en remplaçant E(k) lôensemble des paires de naturels impairs inférieurs à k par lôensemble des paires de naturels inférieurs à k appartenant à I´(p_{1k},..,p_{nk}) privé de p_{1k},..,p_{nk}, B(k) lôensemble des paires de naturels{i,k-i}, i étant impair par lôensemble des paires de naturels {i,k-i}, où i appartient à I´(p_{1k},..,p_{nk}} privé de p_{1k},é ,p_{nk} (Car il est évident quôon a toujours pour j dans {1,..,n} k-p_{jk} est un multiple de p_{jk} et nôest pas premier), et A(k) lôensemble des paires de naturels premiers inférieur à k par lôensemble des paires de naturels premiers inférieurs à k et différents de p_{1k},é ,p_{nk}. On notera M_{eq}I´(p_1,é p_n) ce modèle équiprobable analogue au modèle MI´(p_1,..,p_n))

En réalité, on voit que les modèles précédents ne sont pas assez bons pour décrire avec une très bonne approximation la Comète de Goldbach. :

On note MI le modèle indépendant étudié précédemment en considérant seulement que A est inclus dans I, et MI(k) le modèle indépendant plus précis décrit précédemment où on considère plus précisément que A est inclus dans I(k)=I´(p_{1k},é ,p_{nk}).

En effet, on obtient I(k)=I´(p_{1k},é ,p_{nk}) en considérant lôensemble des naturels modulo ´(k)=p_{1k}×é ×p_{nk}. On obtient alors des nombres modulo ´(k) qui appartiennent tous à I(k). Si n(k) est le nombre de naturels modulo ´(k) qui appartiennent tous à I(k) alors il vient immédiatement que I(k) est un ensemble estimé dôestimation $i_{I(k)}(n)=p_{I(k)}n$, avec $p_{I(k)}$ =n(k)/´(k).
En procédant alors comme dans le modèle MI, on obtient dans le modèle MI(k) que (avec des notations évidentes) $m_{I(k)}$(k)est équivalent à $(p_I/p_{I(k)})m_I$(k), c'est-à-dire $m_{I(k)}$(k) est équivalent à $(p_I/p_{I(k)})k/(Log(k))^2$.
Comme on a toujours p_I supérieur à $p_{I(k)}$, on devrait donc trouver dôaprès le modèle MI(k) que tous les points (k,r(k) doivent être au dessus de la courbe (k,m_I(k)). Or cela nôest visiblement pas le cas, la plupart des points (k,r(k)) sont au dessous de la courbe. (Côest une remarque analogue qui permettait dôinvalider la Conjecture étendue de Goldbach de Hardy et Littlewood [(5)].)

On peut cependant améliorer encore le modèle MI(k) de la façon suivante :
Considérons un naturel k pair nôayant aucun autre diviseur premier que 2. ($k=2^n$).On a vu que dans le modèle MI, on a utilisé lôexpression:
$r_I(k)=f_A(1)f_A(k-1)+$é $+f_A(499)f_A(k-499)+f_A(N_A)f_A(k-N_A)+..+f_A(pô)f_A(k-pô)$.
, avant dôappliquer la propriété de correspondance permettant de modéliser r(k) par la variable aléatoires $X_I r(k)$.
On peut donc écrire aussi :
$r_I(k)=C_I(k)+S_I(k)$, avec $C_I(k)$ est majorée par une constante ($C_I(k)=f_A(1)f_A(k-1)+$é $+f(499)f_A(k-499)$, et $S_I(k)=f_A(N_A)f_A(k-N_A)+..+f_A(pô)f_A(k-pô)$.

Dans cette expression, on sait que certains termes de la forme $f_A(i)f_A(k-i)$ sont nuls, par exemple tous les termes tels que i est multiple de 3,5é Nous allons introduire un nouveau modèle MI´(3), améliorant la modèle MI, dans lequel on utilise que tout multiple de 3 (sauf 3), nôest pas premier. On peut réécrire $S_I(k)$ sous la forme $S_{I´(3)}$(k) suivante, I´(3) ayant été précédemment défini comme lôensemble des naturels impairs qui ne sont pas multiples de 3 :
$S_{I\pi(3)}(k)=\sum_{i\in I\pi(3)} f_A(i)f_A(k-i)$, avec 500<i<k/2.

On sait que i appartient à I´(3) signifier i congru à 1 ou 5 modulo 6, et in a vu que i appartient à I signifie i congru à 1,3 ou 5 modulo 6. On a donc $p_{iI´(3)}$ =1/3 et p_{iI}=1/2.

De plus il est évident que $S_{I'(3)}(k)$ contient les 2/3 des termes de $S_I(k)$ (c'est-à-dire $p_{iI'(3)}/p_{iI}$, puisque la proportion des éléments de {1,é ,k/2-1} tels que i appartient à I est égale à p_{iI} (ou plutôt tend vers p_{iI}), et la proportion de ceux tels que i appartient à I´(3) est égale à $p_{iI'(3)}$.
De plus, si on considère un terme de la somme $S_{I'(3)}(k)$ $f_A(i)f_A(k\text{-}i)$, on sait que i appartient à I'(3), et donc on peut écrire $f_A(i)$ sous la forme $f_{A/I'(3)}(i)$.
Dôautre part par hypothèse k est pair et nôest pas divisible par 3, donc k est congru à 2 ou 4 modulo 6. Supposons par exemple k congru à 2 modulo 6. Or dans $S_{I'(3)}(k)$ les termes sont congrus alternativement à 1 ou 5 modulo 6. On a donc alternativement k-i congru à 1 ou 3 modulo 6, et donc un terme sur 2 de la somme $S_{I'(3)}(k)$ est nul (k-i étant multiple de 3).
Pour chaque terme non nul, k-i est congru à 1 modulo 6, donc k-i appartient à I'(3), et on peut écrire $f_A(k\text{-}i)$ sous la forme $f_{A/I'(3)}(k\text{-}i)$. (on vérifie quôon obtient le même résultat si k congru à 4 modulo 6).

On a donc obtenu les 3 points fondamentaux suivants, k nôayant aucun autre diviseur premier que 2:
a)La somme $S_{I'(3)}(k)$ contient les 2/3 (c'est-à-dire $p_{iI'(3)}/p_{iI}$) des termes de $S_I(k)$.
b)1 terme sur 2 de $S_{I'(3)}(k)$ est nul.
c)Chaque terme non nul de $S_{I'(3)}(k)$ sôécrit $f_{A/I'(3)}(i)$ $f_{A/I'(3)}(k\text{-}i)$, et est donc modélisée par la variable aléatoire $Xf_{A/I'(3)}(i)$ $Xf_{A/I'(3)}(k\text{-}i)$ définie dans le Pseudo-Axiome 4.B.6a) de lôinclusion des ensembles estimés.
Utilisant la loi numérique aléatoire modélisant $f_{A/I'(3)}(i)$, on obtient donc que chaque terme non nul de $S_{I'(3)}(k)$ a une probabilité $p_{iA}p_{k\text{-}iA}/(p_{iI'(3)})^2$ dôêtre égal à1.

Utilisant les 3 propriétés précédentes, on obtient que dans le modèle MI´(3), r(k) est modélisée par une variable aléatoire $X_{I'(3)}(k)$ dôespérance mathématique telle que :

$$E(X_{I\pi(3)}(k)) \approx \frac{p_{iI\pi(3)}}{p_{iI}} \times \frac{1}{2} \times (\frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(3)}})^2 \times E(X_I r(k)) \approx \frac{1}{2} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(3)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I\pi(3)}(k)) \approx \frac{3}{4} \times \frac{k}{(Log(k)^2)} = C_{I\pi(3)}(k) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

On obtient donc un équivalent de $E(X_{I'(3)}(k))$ en multipliant $E(X_I(k))$, (ou $k/(Log(k))^2$) par ¾, c'est-à-dire 0.75.
On remarque CI´(3) (k)=0.75 est proche de C_2å0.66, où C_2 est la constante intervenant dans la Conjecture de Hardy et Littlewood [(5)(7)] .
On voit donc que dans le nouveau modèle MI´(3), on doit sôattendre à trouver des bandes situées en dessous de la courbe $(k,k/(Log(k))^2)$, contrairement aux modèles MI et MI(k), et effectivement on observe que la courbe $(k,k/(Log(k))^2)$ est très voisine de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach (légèrement au dessus).

On pourrait se demander ce que donnerait le modèle MI´(5) analogue au modèle MI´(3), utilisant lôensemble I'(5) de la même façon quôon a utilisé lôensemble I'(3).
En procédant de la même façon que précédemment, considérant un naturel k nôayant aucun diviseur premier autre que 2, on obtient que k doit être congru à 2,4,6 ou 8 modulo 10. De plus les éléments de I'(5) sont ceux congrus à 1,3,7,9 modulo 10.
Si par exemple k est congru à 2 modulo 10, on obtient que pour i dans I'(5), k-i est congru à 1,9,5,3 modulo 10, et donc un terme sur 4 de la somme $S_{I'(5)}(k)$ (exactement analogue à $S_{I'(3)}(k)$) est nul (ceux tels que k-i est congru à 5 modulo 10).(On vérifie quôon obtient le même résultat si k congru à 4,6 ou 8 modulo 10).
On obtient donc des propriétés complètement analogues à celles a)b)c) du modèle MI´(3), et donc :

$$E(X_{I\pi(5)}(k) \approx \frac{3}{4} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(5)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2} = \frac{15}{16} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Lôeffet de correction du modèle MI´(5) est donc moindre que celui de MI´(3).

Si on veut tenir compte des 2 modèles MI´(3) et MI´(5), on considère le modèle MI´(3,5), utilisant lôensemble I'(3,5), quôon a défini comme lôensemble des naturels impairs ni multiples de 3 ni multiple de 5.
Procédant comme précédemment, on considère un naturel k tel que k nôait aucun diviseur premier autre que 2. Donc k est congru à un des naturels 2,4,8,14,16 ,22,24,26 ou 28 modulo 30. Prenons par exemple k congru à 28 modulo 30.

De plus, I´(3,5) contient les naturels congrus à un des naturels 1,7,11,13,17,19,23 ou 29 modulo 30. Donc $p_{iI´(3,5)}$ =8/30.
Pour i dans I´(3,5), on obtient donc k-i congru à un des naturels 27,21,17,15,11,9,5,29. Donc 5/8 des termes de $S_{I´(3,5)}$ (k) sôannulent. (Ceux pour lesquels k-i est congru à 27,21,15,9 et 5 modulo 30).
Il en résulte que 5/8 des termes de $S_{I´(3,5)}$ (k) sôannulent. Utilisant donc des propriétés analogues aux propriétés a)b)c) du modèle MI´ (3), on obtient avec des notations analogues :

$$E(X_{I\pi(3,5)}(k)) \approx \frac{3}{8}\times\frac{30}{8}\times\frac{1}{2}\times\frac{k}{(Log(k))^2} = \frac{90}{128}\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

On remarque :

$$E(X_{I\pi(3,5)}(k)) \approx \frac{90}{128}\times\frac{k}{(Log(k))^2} = (1-\frac{1}{(3-1)^2})(1-\frac{1}{(5-1)^2})\frac{k}{(Log(k)^2} \cong C_{I\pi(3,5)}(k)\frac{k}{(Log(k)^2)}$$

avec $C_{I´(3,5)}$(k) très proche de C_2, C_2 étant la constante intervenant dans la Conjecture de Hardy et Littlewood.
On rappelle que dôaprès cette Conjecture [(5) (7)] :

$$r(k) \approx 2C_2 \prod_{p/k,p\geq 3}(\frac{p-1}{p-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$, avec :

$$C_2 = \prod_{p\geq 3}(1-\frac{1}{(p-1)^2}) \cong 0{,}66$$, p désignant un nombre premier dans les expressions précédentes.

On a vu en introduction quôelle était fausse, mais il semble que sa variante obtenue en supprimant le facteur 2 soit vraie, et puisse être extrêmement approchée par le propositions obtenues par la TAN concernant la modélisation statistique de r(k).

Considérons maintenant le modèle dans lequel k a plusieurs diviseurs mais nôest pas divisible par 3. On note alors I(k)´(3) lôensemble I(k)ž I´(3), et MI(k)´(3) le modèle analogue au modèle MI´(3) sôappliquant aux naturels k pairs non divisibles par 3.
Dans le modèle MI(k), on a écrit r(k) sous la forme, de façon analogue au modèle MI :
r(k)=$C_{I(k)}$ (k)+$S_{I(k)}$ (k), avec :

$$S_{I(k)}(k) = \sum_{i\in I(k),500<i<k/2} f_A(i)f_A(k-i) \quad .$$

Dans le modèle MI(k)´(3), de façon analogue au modèle MI´(3), on considère seulement les termes de SI(k)(k) qui ne sont pas multiples de 3.On obtient la somme $S_{I(k)´(3)}$ (k) :

$$S_{I(k)\pi(3)}(k) = \sum_{i\in I(k)\pi(3),500<i<k/2} f_A(i)f_A(k-i) \quad .$$

Considérant lôensemble I(k)´(3), on obtient comme précédemment que la somme $S_{I(k)´(3)}$ (k) ne comporte que la proportion $p_{iI(k)´(3)}/p_{iI}$ des termes de S_I(k).
Dôautre part, puisque k nôest pas divisible par 3, on a toujours k congru à 2 ou 4 modulo 6. Supposons par exemple k congru à 2 modulo 6.

Supposons I(k)=I´(p_{1k},é ,p_{nk}). On a alors I(k)´(3)=I´(3,p_{1k},é ,p_{nk}). Soit n_1(k,3)/n(k,3) la proportion des éléments de **N**/6p_{1k}..p_{nk}**N** congrus à 1 modulo 6, et n_5(k,3)/n(k,3) la proportion de ceux congrus à 5 modulo 6. On obtient alors que la proportion n_5(k,3)/n(k,3) des termes de $S_{I(k)´(3)}$ (k) sont nuls, car pour i congru à 5 modulo 6, alors k-i=2-5 congru à 3 modulo 6 et donc nôest pas premier. Dans tous les exemples considérés, on aura :

$$\frac{n_1(k,3)}{n(k,3))} = \frac{n_5(k,3)}{n(k,3)} = \frac{1}{2}$$

De plus, si on considère un terme non nul de cette somme correspondant à i, on sait que i appartient à I(k)´(3), et donc on peut écrire f_A(i) sous la forme $f_{A/I(k)´(3)}$ (i). De plus on sait que k-i appartient à I(k) (car i appartient à I(k)), et k-i appartient à I´(3). (Puisque k-i est congru à 1 modulo 6). Il en résulte que k-i appartient à I(k)´(3), et donc on peut écrire tout terme non nul de la somme $S_{I(k)´(3)}$ (k) sous la forme $f_{A/I(k)´(3)}$ (i)$f_{A/I(k)´(3)}$ (k-i).
Il en résulte quôon obtient des propriétés totalement analogues aux propriétés a)b)c) du modèle MI´(3), dont on déduit que la modèle MI(k)´(3) prévoit que r(k) est modélisé par la variable aléatoire $X_{I(k)´(3)}$r(k) , avec :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k) \approx \frac{p_{iI(k)\pi(3)}}{p_{iI}} \times \frac{n_1(k,3)}{n(k,3)} \times (\frac{p_{iI}}{p_{iI(k)\pi(3)}})^2 \times \frac{k}{(Log(k))^2} = \frac{1}{2} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)\pi(3)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Dôaprès lôexpression dôun équivalent de E($X_{I(k)}$ r(k)), on voit quôon obtient un équivalent de E($X_{I(k)´(3)}$ (k) en multipliant E($X_{I(k)}$ r(k)) par le coefficient $c_{I(k)´(3)}$ (k)=0.5 $p_{iI(k)}$ /$p_{iI(k)´(3)}$ (k).
Car on a vu :

$$E(X_{I(k)}r(k)) \approx \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}} \times \frac{k}{(Log(k)^2)}$$

Donnons quelques exemples numériques :
Dans le cas où I(k)=I·(5) (k nôa que 5 et 2 pour diviseurs premiers.), on obtient que I·(5) contient lôensemble des naturels congrus à 1,3,7,9 modulo 10, et donc on a alors $p_{iI(k)}$ =4/10.
On a alors I(k)´ (3)=I·(3,5), et donc I(k)´ (3) contient les naturels congrus à 1,7,11,13,17,19,23,29 modulo 30, donc $p_{iI(k)´(3)}$ =8/30.
On obtient le coefficient :

$$c_{I(k)\pi(3)}(k) = \frac{1}{2} \times \frac{p_{iI(k)}}{p_{iI(k)\pi(3)}} = \frac{1}{2} \times \frac{30}{8} \times \frac{2}{5} = 0.75$$

On obtient donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{3}{4} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(5) \times (\frac{5-1}{5-2}) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Avec :

$$C_{I(k)\pi(3)}(5) = (1 - \frac{1}{(3-1)^2}) \times (1 - \frac{1}{(5-1)^2}) \cong C_2$$

La prédiction du modèle MI(k)´ (3) dans cet exemple est donc très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Dans le cas où I(k)=I·(7), on obtient que I·(7) contient les naturels congrus à 1,3,5,9,11,13 modulo 14, donc $p_{iI(k)}$ =6/14.
I(k)´ (3)=I´ (3,7) contient les naturels congrus à 1,5,11,13,17,19,23,25,29,31,37,41 modulo 42, et donc $p_{iI(k)´(3)}$ =12/42.
On obtient le coefficient :

$$\frac{1}{2} \times \frac{p_{iI(k)}}{p_{iI(k)\pi(3)}} = \frac{1}{2} \times \frac{42}{12} \times \frac{6}{14} = 0.75$$

On obtient en procédant comme dans lôexemple précédent :

$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(7) \times (\frac{7-1}{7-2}) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

Avec :

$$C_{I(k)\pi(3)}(7) = (1 - \frac{1}{(3-1)^2}) \times (1 - \frac{1}{(7-1)^2}) \cong C_2$$

La prédiction du modèle MI(k)´ (3) dans cet exemple est donc très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On voit que le modèle MI(k)´(3) a la même prédiction que le modèle MI´(3) dans le cas où k nôa aucun autre diviseur premier que 2 (On a alors I(k)=I). Le coefficient était alors de 0.75, et on voit donc quôen général ce coefficient $c_{I(k)´(3)}$ (k) semble être égal à 0.75.
Dans le cas où k est divisible par 3, le modèle MI(k)´(3) nôapporte aucune amélioration, car alors I(k) est inclus dans I´(3) et de plus k est congru à 0 modulo 6. On peut donc considérer que MI(k)´(3) coïncide dans ses prévisions avec MI(k) lorsque k est divisible par 3.

On observe que la courbe (k,0.75/(Log(k))^2) (obtenue dans le modèle MI(k)´(3) dans le cas où k a 2 pour seul diviseur premier) semble être très proche de la courbe inférieure de la Comète de Goldbach, par exemple:
$m_{I(k)´(3)}$(10000)å88, $m_{I(k)´(3)}$ (50000)å 320, $m_{I(k)´(3)}$ (75000)å446, $m_{I(k)´(3)}$ (90000)å518.
Avec $m_{I(k)\pi(3)}(k) = E(X_{I(k)\pi(3)}r(k))$

Pour vérifier la validité de MI(k)´(3), on peut considérer les nombres de la forme 2^n, avec n grand. On devrait obtenir r(2^n)å$m_{I(k)´(3)}$(2^n)å0.75×2^n/(nLog(2))^2.

On pourrait ensuite étudier les naturels de la forme 2^n3^s, (avec s>1) qui nôont que 3 pour seul diviseur premier autre que 2, et donc dont on peut facilement estimer $m_{I(k)´(3)}$ (k) qui est alors identique à $m_{I(k)}$ (k) comme on lôa vu.
Ce cas dôailleurs est très intéressant : En effet, dôaprès ce qui précède, pour I(k)=I´(3) :
$m_{I(k)}$(k)å$pi_I/p_{iI(k)}$ k/(Log(k))^2=1.5k/(Log(k))^2.
On obtient alors utilisant cette expression :
$m_{I(k)}$(50000)å640, $m_{I(k)}$(75000)å892, $m_{I(k)}$(90000)å1037.

On remarque dans le cas précédent:
$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx \frac{3}{2} \times \frac{k}{(Log(k))^2} = (\frac{3-1}{3-2}) \times (1 - \frac{1}{(3-1)^2}) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$
Donc :
$$E(X_{I(k)\pi(3)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(3)}(3) \times (\frac{3-1}{3-2}) \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$
Avec $C_{I(k)´(3)}$(3) très proche de C_2. On retrouve que la prédiction dans cet exemple du modèle MI(k)´(3) est très proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On observe que les points (k,$m_{I(k)}$(k)) pour k=2^n3^s se trouvent très proches de lôune des bandes les plus froncées de la Comète de Goldbach, ce qui donc tend à confirmer la validité du modèle MI(k) (coïncidant MI(k)´(3) puisque k est divisible par 3). On rappelle quôon peut aussi le tester en calculant r(2^n3^s) pour certaines valeurs de s et de n, et en les comparant avec lôestimation de MI(k) donnée précédemment.

On voit donc que le modèle MI(k)´(3) conduit à obtenir pour tout k supérieur à 1002, que la fonction r(k) est modélisée par la variable aléatoire $X_{I(k)´(3)}$r(k) définie précédemment. Ceci constitue une loi numérique aléatoire, qui est illustrée apparemment par certains tests.

Le modèle MI(k)´(3) prévoit notamment lôexistence de bandes dôéquation f(k)=C_kk/(Log(k))^2, comme on en observe sur la Comète de Goldbach. Ceci est dû aux 2 propriétés suivantes de $X_{I(k)´(3)}$r(k) :
a)E($X_{I(k)´(3)}$r(k)) åC_kk/(Log(k))^2, où C_k est une constante dépendant des diviseurs premiers de k.
b)On obtient utilisant lôinégalité de Chebychev que les intervalles de confiance minimaux à 95% (ou de façon évidente 99,9%) de $X_{I(k)´(3)}$r(k)), notés [$miG_{I(k)´(3)}$ (k), $MaG_{I(k)´(3)}$ (k)] sont tels que ($MaG_{I(k)´(3)}$ (k)-$miG_{I(k)´(3)}$ (k))/E($X_{I(k)´(3)}$r(k)) tend vers 0 pour k tend vers lôinfini.

Il apparaît donc que le modèle MI(k)´(3) entraîne des prédictions remarquables concernant lôaspect de la Comète de Goldbach. De la même façon quôon a défini les modèles MI(k)´(3) et MI(k)´(3,5), on peut définir le modèle MI(k)´(p_1,é .,p_n) où p_1,é .,p_n sont les n premiers nombres premiers consécutifs après 2. Il est évident que dans tout modèle MI(k)´(p_1,é ,p_n), on peut obtenir par des pseudo-preuves aléatoires des propositions P($I_{I(k)´(p1,é ,pn)}$ (k),q) analogues aux propositions P(I(k),q) obtenues dans le modèle MI. Comme on lôa remarqué en considérant les modèles MI(k)´(3) et MI(k)´(3,5), il semble que les modèles MI(k)´(p_1,é ,p_n) permettent dôobtenir des propositions qui tendent quand n tend vers lôinfini vers la variante

de la Conjecture étendue de Goldbach de Hardy et Littlewood, obtenue en supprimant un facteur 2 dans la Conjecture initiale.

On pourrait montrer ceci explicitement, en montrant que si I(k)=I· (p_{1k},é .,p_{sk}), alors dans le modèle MI(k)´ (p_1,é .,p_n), on obtient :

$$E(X_{I(k)\pi(p1,...,pn)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p1,...,pn)}(p_{1k},...,p_{sk})\prod_{i=1}^{s}(\frac{p_{ik}-1}{p_{ik}-2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

avec $C_{I(k)´(p1,é\ ,pn)}$ (p_{1k},é .,p_{sk}) tend vers C_2 quand n tend vers lôinfini. On a vérifié que ceci était en accord avec tous les exemples numériques considérés. Ceci se ramène donc apparemment à un problème résoluble par la Théorie des nombres classiques.

Pour le montrer, on utilisera le Théorème :

THEOREME 4.B.6Ba)) :
Si p_1,é ,p_n sont n naturels premiers et A(p_1,é ,p_n)={1,é ,2p_1é .p_n} (C'est-à-dire A est lôensemble des naturels de [1,2p_1é p_n]), si p(A(p_1,é ,p_n))={i appartenant à A(p_1,é ,p_n) tel que i nôest divisible par aucun des nombres 2,p_1,é ,p_n} alors :
Card(p(A(p_1,..,p_n))=(p_1-1)×é ×(p_n-1).

Démonstration (par récurrence) :
Si n=1 :
A(p_1)={1,é ,2p_1}.
Les éléments de A(p_1) non divisibles par 2 sont les éléments de {1,é .,2p_1-1} au nombre de p_1. Parmi ceux-ci, seul le naturel p_1 est divisible par p_1.
Donc Card(p(A(p_1))=p_1-1.

Supposons quôon ait montré le Théorème pour n-1. Soit alors p_1,é .,p_n n nombres premiers.
On définit alors p(A(p_1,é .,p_{n-1}))={$h_{1,n-1}$,é .,$h_{s,n-1}$}, avec s=Card(p(A(p_1,é ,p_{n-1})).
Les éléments de A(p_1,é .,p_n) qui ne sont pas divisibles par 2,p_1,é ,p_{n-1} sont ceux congrus à $h_{1,n-1}$,é ,$h_{s,n-1}$ modulo 2p_1é p_{n-1}, et donc sont les éléments de lô ensemble : {$h_{1,n-1}$,é .,$h_{s,n-1}$, 2p_1é p_{n-1}+$h_{1,n-1}$,é ,2p_1é p_{n-1}+$h_{s,n-1}$,é .,2p_1é p_{n-1}(p_n-1)+$h_{1,n-1}$,.,2p_1é p_{n-1}(p_n-1)+$h_{s,n-1}$}.
Lôensemble précédent a de façon évidente p_nCard(p(A(p_1,é ,p_{n-1})) éléments.
De plus les éléments de lôensemble précédent divisibles par p_n sont de la forme ap_n, avec a nôest pas divisible par 2,p_1,é ,p_{n-1}, c'est-à-dire a appartient à p(A(p_1,é ,p_{n-1})). Il y en a donc un nombre égal à Card(p(A(p_1,é ,p_{n-1}))
Il en résulte que p(A(p_1,é ,p_n)) qui est lôensemble précédent privé de ses éléments divisibles par p_n a un nombre dô éléments égal à (p_nCard(p(A(p_1,é ,p_{n-1})))-Card(p(A(p_1,é ,p_{n-1})) c'est-à-dire (p_n-1)Card(p(A(p_1,é ,p_{n-1})).
On a donc montré par récurrence le Théorème.

Une conséquence immédiate de ce Théorème est le Corollaire :
COROLLAIRE 4.B.6Bb) :
Si on a I(k)=I· (p_1,é .,p_n), alors :

$$p_{iI(k)}=\frac{1}{2}\times\prod_{j=1}^{n}(\frac{p_j-1}{p_j}).$$

La démonstration est immédiatement conséquence du Théorème précédent si on considère les naturels modulo 2p_1é p_n.

REMARQUE 4.B.6Bc) :
On a vu que dans le modèle MI(k) on avait :

$$E(X_{I(k)}r(k)) \approx \frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}}\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Utilisant le Corollaire précédent, on obtient, si I(k)=I· (p_1,é ,p_n) :

$$\frac{p_{iI}}{p_{iI(k)}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{p_j}{(p_j - 1)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{p_j - 1}{p_j - 2} \times \prod_{j=1}^{n} (1 - \frac{1}{(p_j - 1)^2})$$

On voit que cette expression est proche de la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Ce qui précède permet de comparer les prédictions du modèle MI(k) avec la variante de la Conjecture d Hardy et Littlewood. Pour comparer celle-ci avec le modèle plus précis MI(k)´(p_1,é ,p_n), on procède comme suit :

Montrons le Théorème :

THEOREME 4.B.6Bd) :

Si k est un naturel pair de A(p_1,é ,p_n) (défini plus haut de même que p(A(p_1,é ,p_n)), divisible par aucun des nombres premiers p_1,..,p_n, si on pose :

d_k(p(A(p_1,é ,p_n))={i/ i et k-i nôest divisible par aucun des naturels p_1,é .,p_n))}

Alors Card(d_k(p(A(p_1,é ,p_n)))=(p_1-2)é .(p_n-2).

Démonstration (Par récurrence) :

Montrons dôabord le Lemme :

LEMME 4.B.6Be) :

k étant un élément quelconque de A(p_1,é ,p_n), lôensemble des éléments de A(p_1,é ,p_n) congrus à k modulo p_n, contient exactement un représentant de chaque élément de **N**/(2p_1..p_{n-1})**N**, et est égal à lôensemble de ces représentants.

Démonstration :

Soit k dans A(p_1,é .,p_n). (On rappelle A(p_1,é ,p_n)={1,é ,2p_1é p_n})

On suppose k congru à k_n modulo p_n, avec k_n dans {1,é .,p_n}.

Lôensemble des naturels de A(p_1,..,p_n) congrus à k modulo p_n est donc lôensemble des naturels k_n+ap_n avec a naturel appartenant à [0,2p_1é p_{n-1}-1]. Il a donc 2p_1é p_{n-1} éléments.

Supposons quôun de ces naturels k_n+ap_n différent de k_n soit congru à k_n modulo 2p_1é .p_{n-1}.

Alors on a ap_n=2əp_1é .p_{n-1}.(Avec ə>0).

Comme p_n est premier avec 2,é ,p_{n-1}, p_n divise ə, donc ə=sp_n, s étant un naturel non nul, et donc a=2sp_1é .p_{n-1}.

Ceci est impossible car a<2p_1é p_{n-1}.

Donc aucun des naturels de la forme k_n+ap_n de A(p_1,é ,p_n) nôest congru à k_n modulo 2p_1é p_{n-1}.

Il est évident quôon arrive de la même façon au même résultat pour tout naturel k_n+ap_n de A(p_1,é ,p_n), c'est-à-dire quôaucun des naturels k_n+bp_n de A(p_1,é ,p_n) nôest congru à k_n+ap_n modulo 2p_1..p_{n-1} si aÍ b.

Or on sait que le nombre dôéléments de **N**/2p_1é .p_{n-1}**N** est égal à 2p_1é p_{n-1}, c'est-à-dire au nombre de naturels sôécrivant k_n+ap_n de A(p_1,é ,p_n).

Il en résulte que lôensemble des éléments de A(p_1,é p_n) congrus à k modulo p_n (C'est-à-dire des naturels de la forme k_n+ap_n) contient exactement un représentant de chaque élément de **N**/2p_1é p_{n-1} **N**, et est égal à lôensemble de ces représentants.

On a donc démontré le Lemme.

Montrons le Théorème pour n=1 :

On a ,p_1 étant un nombre premier, A(p_1)={1,é ,2p_1}.

p(A(p_1))={1,..,2p_1-1}(sans p_1), et a p_1-1 éléments.

Si k est un naturel pair de A(p_1) non divisible par p_1, on a k=2s, avec sÍ p_1, et ou bien 1<k<p_1, ou bien p_1<k<2p_1.

Si j appartient à p(A(p_1)), k-j=2s-j est impair et donc nôest pas divisible par 2.

De plus k-j est divisible par p_1 si k-j=Ŭp_1, Ŭ étant un entier, c'est-à-dire j=k-Ŭp_1.

Si 1<k<p_1, il y a une seule solution j dans p(A(p_1)) :j=k+p_1.

Si p1<k<2p_1, il y a une seule solution j dans p(A(p_1)) :j=k-p_1.

Puisquôon a défini d_k(p(A(p_1)) comme lôensemble des naturels i de p(A(p_1)) tels que k-i non divisible par 2 ni par p_1, on a donc :

Card(d_k(p(A(p_1)))=p_1-2. (Car d_k(A(p_1))) est constitué de p(A(p_1)) privé de j).

On a donc démontré le Théorème pour n=1.

Supposons quôon ait démontré le Théorème pour $d_k(p(A(p_1,$é $,p_{n-1})))$.
On a vu quôon pouvait écrire :
$p(A(p_1,$é $,p_{n-1}))=\{h_{1,n-1},$é $.,h_{s,n-1}\}$, avec $s=(p_1-1)$é $(p_{n-1}-1)\}$.
On a vu que $p(A(p_1,$é $,p_n))$ était constitué de lôensemble B défini par :
$B=\{h_{1,n-1},$é $,h_{s,n-1},$é $..,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+h_{1,n-1},..,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+h_{s,n-1}\}$
privé des naturels de la forme ap_n, avec a dans $p(A(p_1,$é $,p_{n-1}))$.
k étant un naturel pair de $A(p_1,..,p_n)$ divisible par aucun des naturels $p_1,..,p_n$, on rappelle que $d_k(p(A(p_1,$é $,p_{n-1})))$ est lôensemble des éléments i de $p(A(p_1,..p_{n-1}))$ tel que k-i nôest divisible par aucun des naturels $p_1,$é $,p_{n-1}$.
Soit $d_k(p(A(p_1,$é $,p_{n-1})))=\{t_{1,n-1},$é $.,t_{r,n-1}\}$, avec $r=(p_1-2)$é $.(p_{n-1}-2)$ dôaprès lôhypothèse de récurrence.
Soit $C=\{t_{1,n-1},$é $,t_{r,n-1},$é $..,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+t_{1,n-1},..,2p_1..p_{n-1}(p_n-1)+t_{r,n-1}\}$.
C est donc lôensemble des éléments i de B tel que k-i ne soit pas divisible par un des naturels $p_1,$é p_{n-1}.
Il est évident $Card(C)=p_nr=p_n(p_1-2)$é $(p_{n-1}-2)$.
On a défini $d_k(p(A(p_1,$é $p_n)))$ comme étant lôensemble des naturels i de $p(A(p_1,$é $,p_n))$ tel que k-i ne soit divisible par aucun des naturels premiers $p_1,$é $,p_n$.
Donc $d_k(p(A(p_1,$é $,p_n))$ est inclus dans C, car tout élément i de $d_k(p(A(p_1,..p_n)))$ appartient à B et est tel que k-i nôest divisible par aucun des naturels $2,p_1,$é $,p_{n-1}$.
De plus tout élément i de C tel que :
-i nôest pas de la forme ap_n, avec a dans $p(A(p_1,$é $,p_{n-1}))$.
-k-i nôest pas divisible par p_n.
est tel que i appartient à $d_k(p(A(p_1,..,p_n)))$, car alors i appartient à $p(A(p_1,$é $,p_n)$ et k-i nôest divisible par aucun des naturels $p_1,$é $,p_n$.
Donc si on définit les ensembles D et E par :
$D=\{i/$ i appartient à C et k-i est divisible par $p_n\}$
$E=\{i/$ i appartient à C et i est de la forme ap_n, avec a dans $p(A(p_1,$é $,p_{n-1}))\}$
On a alors $d_k(p(A(p_1,$é $,p_n)))=C/(DUE)$.
De plus si i appartient à E, alors i nôappartient pas à D puisque k nôest pas divisible par p_n. Donc D et E ont une intersection vide, et donc :
$Card(C/(DUE))=Card(C)-Card(D)-Card(E)$.
Or D est lôensemble des naturels i de $A(p_1,$é $,p_n)$ congrus à k modulo p_n, tel que i ne soit pas divisible par $p_1,$é $,p_{n-1}$ et que de plus k-i ne soit pas divisible par $p_1,$é $,p_{n-1}$.
Appliquant le Lemme 4B6Be) et dôaprès lôhypothèse de récurrence, le nombre dôéléments de D est donc :
$Card(D)=Card(d_k(p(A(p_1,$é $,p_{n-1}))))=(p_1-2)$é $(p_{n-1}-2)$.
De même, E est lôensemble des naturels i de $A(p_1,..,p_n)$ congrus à p_n modulo p_n et tel que i soit divisible par aucun des nombres $p_1,$é $,p_{n-1}$ de même que k-i. Appliquant le Lemme 4B6Be) et dôaprès lôhypothèse de récurrence :
$Card(E)=Card(d_k(p(A(p_1,$é $,p_{n-1}))))=(p_1-2)$é $(p_{n-1}-2)$.
Finalement, on obtient :
$Card(d_k(p(A(p_1,$é $.,p_n)))=p_n(p_1-2)$é $(p_{n-1}-2)-(p_1-2)$é $(p_{n-1}-2)-(p_1-2)$é $(p_{n-1}-2)$.
Donc $Card(d_k(p(A(p_1,$é $,p_n)))=(p_1-2)$é $.(p_n-2)$.
On a donc démontré le Théorème 4.B6Bd).

On peut à partir du Théorème précédent obtenir une expression donnant un équivalent de E(Xr(k)) prédite par tout modèle MI· $(p_1,$é $.,p_n)$, qui on lôa vu prédit la même expression que MI(k)´ $(p_1,$é $,p_n)$ lorsque k a 2 pour unique diviseur premier. On obtient cette expression dans lôexemple suivant :

EXEMPLE 4.B6Bf) :
Soit $p_1,$é $,p_n$ n nombres premiers consécutifs après 2, et k un naturel nôayant aucun diviseur autre que 2 (I(k)=I).
On a vu que dans le modèle MI´ $(p_1,$é $,p_n)$ (qui dans ce cas avait la même prédiction que le modèle MI(k)´ $(p_1,..,p_n)$), on obtenait, généralisant le modèle MI´ (3) :

$$E(X_{I\pi(p1,...,pn)}r(k)) \approx \frac{n_{dk}(p_1,...,p_n)}{n(p_1,...,p_n)} \times \frac{p_{iI}}{p_{iI\pi(p1,...,pn)}} \times \frac{k}{(Log(k))^2}$$

avec $n_{dk}(p_1,$é $,p_n)$ est lôensemble des éléments de **N**$/2p_1$é p_n**N** tels que k-i ne soit divisible par aucun des nombres $p_1,$é $,p_n$, et $n(p_1,$é $,p_n)$ est le nombre dôéléments de **N**$/2p_1$é p_n**N**.
Dôaprès les Théorèmes 4.B6Ba)b)d), on obtient :

$$E(X_{I\pi(p1,..,pn)}r(k)) \approx \prod_{j=1}^{n}\frac{(p_j-2)}{(p_j-1)}\times\prod_{j=1}^{n}\frac{(p_j-1)}{(p_j-2)}\times\prod_{j=1}^{n}(1-\frac{1}{(p_j-1)^2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Donc :

$$E(X_{I\pi(p1,..,pn)}r(k)) \approx \prod_{j=1}^{n}(1-\frac{1}{(p_j-1)^2})\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$

Cette expression tend bien vers la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

Pour obtenir lôexpression générale donnant un équivalent de E(Xr(k)) prédite par un modèle MI(k)´ (p_1,é ,p_n), on utilise aussi le Théorème suivant :

THEOREME 4B6Bg) :
Si p_1,é ,p_n sont n nombres premiers et q_1,é ,q_r sont r nombres premiers différents de p_1,é ,p_n, k étant un naturel pair non divisible par p_1,é ,p_n alors le nombre dôéléments de lôensemble $d_{k(p1,...,pn)}$ (p(A(p_1,é ,p_n,q_1,..,q_r))) dont les éléments sont les éléments i de p(A(p_1,é ,q_r)) tels que k-i nôest pas divisible par p_1,..,p_n est égal à (q_1-1)é .(q_r-1)(p_1-2)é (p_n-2).
(Et donc la proportion des éléments i de p(A(p_1,é ,q_r)) tels que k-i nôest pas divisible par p_1,..,p_n est la même que celle des éléments j de p(A(p_1,é ,p_n)) tels que k-j nôest pas divisible par p_1,..,p_n, dôaprès les Théorèmes 4B6Ba) et 4B6Bd).

Démonstration (Par récurrence) :
Soit k, naturel pair non divisible par p_1,..,p_n.
On suppose r=1.
Soit p(A(p_1,é ,p_n))={$h_{1,n}$,é ,$h_{s,n}$}.
Lôensemble des éléments de A(p_1,..,p_n,q_1} non divisibles par p_1,..p_n est donc :
B={$h_{1,n}$,é $h_{s,n}$,p_1é p_n+$h_{1,n}$,..,p_1..p_n+$h_{s,n}$,..,p_1..p_n(q_1-1)+$h_{1,n}$,..,p_1..p_n(q_1-1)+$h_{s,n}$}
Parmi ceux-ci, dôaprès le Théorème 4B6Bd), il y a q_1(p_1-2)..(p_n-1) éléments i tels que k-i nôest pas divisible par p_1,..,p_n.
Soit C lôensemble de ces éléments.
Lôensemble $d_{k(p1,é\ ,pn)}$ (p(A(p_1,é ,p_n,q_1))) est donc constitué des éléments i de C tels que :
a)i nôest pas divisible par q_1.
b)k-i nôest pas divisible par p_1,..,p_n.
La condition b) est vérifiée pour tous les éléments de C.
De plus, utilisant le Lemme 4B6Be), si D={i/ i appartient à C et i=aq_1 pour un naturel a}, on sait que lôensemble des naturels de A(p_1,..,p_n,q_1) congrus à q_1 modulo q_1 contient exactement un représentant de chaque élément de **N**/2p_1é p_n**N**, et est constitué de ces représentants, et donc D est constitué de chaque représentant i appartenant à p(A(p_1,..,p_n)) et tel que k-i nôest pas divisible par p_1,..,p_n. Dôaprès le Théorème 4B6Bd), ce nombre est égal à (p_1-2)..(p_n-2).
On a donc :
Card($d_{k(p1,..,pn)}$ (p(A(p_1,..,p_n,q_1)))=Card(C)-Card(D)=(q_1-1)(p_1-2)..(p_n-2).

Supposons quôon ait montré le Théorème pour $d_{k(p1,..pn)}$ (p(A(p_1,..,p_n,q_1,..,q_{r-1}))).
On procède alors exactement comme dans le cas r=1 :
Soit p(A(p_1,é ,q_{r-1}))={$h_{1,n,r-1}$,é .,$h_{s,n,r-1}$}
Lôensemble des éléments de A(p_1,é ,q_r) non divisibles par p_1,..,q_{r-1} est donc :
B={$h_{1,n,r-1}$,é $h_{s,n,r-1}$,p_1é p_n.q_1..q_{r-1}+$h_{1,n,r-1}$,.,p_1..p_né q_{r-1}+$h_{s,n,r-1}$,..,p_1..p_n..q_{r-1}(q_r-1)+$h_{1,n,r-1}$,..,p_1..p_n..q_{r-1}(q_r-1)+$h_{s,n,r-1}$}
Parmi ceux-ci, dôaprès lôhypothèse de récurrence il y a q_r(q_1-1)é (q_{r-1}-1)(p_1-2)..(p_n-1) éléments i tels que k-i nôest pas divisible par p_1,..,p_n.
Soit C lôensemble de ces éléments.
Lôensemble des éléments i de p(A(p_1,..,q_r)) tels que k-i nôest pas divisible par p_1,..,p_n (Cest à dire les éléments de $d_{k(p1,...,pn)}$ (p(A(p_1,..,p_n,é .,q_r))) est donc constitué des éléments i de C tels que :
a)i nôest pas de la forme aq_r.
b)k-i nôest pas divisible par p_1,é ,p_n.
Comme dans le cas r=1, la condition b) est toujours vérifiée.

Si on pose D={i appartenant à C, et i=aq$_r$}, on obtient exactement comme dans le cas r=1 utilisant le Lemme 4B6Be) que le nombre dôéléments de D est égal à, dôaprès lôhypothèse de récurrence :
Card(D)=Card($d_{k(p1,..,pn)}$ (p(A(p$_1$,..,p$_n$,é .q$_{r-1}$)))= (q$_1$-1)é (q$_{r-1}$-1)(p$_1$-2)..(p$_n$-1).
Finalement :
Card($d_{k(p1,..,pn)}$ (p(A(p$_1$,..,p$_n$,é q$_r$)))=Card(C)-Card(D)= (q$_1$-1)..(q$_r$-1)(p$_1$-2)..(p$_n$-2).
On a donc montré le Théorème.

Dôaprès ce qui précède, on obtient facilement lôexpression donnant un équivalent de E(Xr(k)) prédite par un modèle quelconque MI(k)´(p$_1$,..,p$_n$), avec I(k)=I´(t$_1$,é ,t$_r$), c'est-à-dire t$_1$,..,t$_r$ sont les diviseurs premiers de k autres que 2. De même quôon a vu que si k était divisible par 3 la prédiction de MI(k)´(3) était la même que celle de MI(k), on peut considérer que si k a t$_1$,é t$_r$ pour facteurs premiers autres que 2, alors la prédiction de MI(k)´(p$_1$,é ,p$_n$) est celle de MI(k)´(q$_1$,é ,q$_s$), où q$_1$,é ,q$_s$ sont les éléments de {p$_1$,..,p$_n$} différents de t$_1$,é ,t$_r$.
On obtient alors facilement la prédiction de MI(k)´(p$_1$,é ,p$_n$), utilisant les résultats de la Remarque 4B6Bc), ceux de lôExemple 4B6Bf) et le Théorème 4B6Bg) :

$$E(X_{I(k)\pi(p1,\dots,pn)}r(k)) \approx C_{I(k)\pi(p1,\dots,pn)}(t_1,\dots,t_r)\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$, avec :

$$C_{I(k)\pi(p1,\dots,pn)}(t_1,..,t_r)=\prod_{i=1}^{s}(1-\frac{1}{(q_i-1)^2})\times\prod_{j=1}^{r}(\frac{t_j-1}{t_j-2})\times(1-\frac{1}{(t_j-1)^2})$$

On voit donc que cette expression tend asymptotiquement vers la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood.

On obtient alors, procédant exactement comme dans lôEtude de la fonction r(k) par le modèle simple MI 4B6A) une proposition P2$_{I(k)´(p1,é ,pn)}$ (r(k)) analogue à la proposition P2$_{MI}$(r(k)) donnant une estimation de r(k) obtenue par le modèle MI(k)´(p$_1$,é ,p$_n$). Dans cette proposition la fonction r(k) est définie sur le sous-ensemble F(t$_1$,é ,t$_r$) de **N** contenant les multiples pairs de t$_1$,é ,t$_n$ supérieurs à 2N$_A$=1002. Et on a dans cette proposition :
$E(X_{I(k)\pi(p1,\dots,pn)}\, r(k))\approx C_{I(k)\pi(p1,\dots,pn)}\,(t_1,\dots,t_r)k/(Log(k))^2$.

Il faudrait vérifier si cette variante est bien en accord avec la Comète de Goldbach. Si tel nôétait pas le cas, cela signifierait quôil faut trouver des modèles plus précis que les modèles du type MI(k)´(p$_1$,é ,p$_n$). Il est très vraisemblable quôon ne puisse jamais démontrer, utilisant seulement la Théorie des Nombres classiques des propositions analogues à celles quôon obtient par la TAN décrivant la Comète de Goldbach utilisant les modèles MI(k)´(p$_1$,é ,p$_n$) et donc en particulier la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood, tout comme la Conjecture faible de Goldbach.

De la même façon que le modèle MI est analogue au modèle équiprobable M$_{eq}$I exposé dans lôarticle [5], et quôon a défini un modèle M$_{eq}$I´(p$_1$,é ,p$_n$) analogue au modèle indépendant MI´(p$_1$,é ,p$_n$), on peut définir un modèle équiprobable M$_{eq}$I(k)´(p$_1$,é ,p$_n$) analogue au modèle indépendant MI(k)´(p$_1$,é ,p$_n$). On obtient facilement en procédant comme pour le modèle M$_{eq}$I, que chaque modèle indépendant et son analogue équiprobable ont une espérance équivalente quand k tend vers lôinfini.

En réalité, la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood ne représente quôapproximativement les propriétés de la Comète de Goldbach pour k dans [5000,100000]. En effet dôaprès cette variante, on devrait trouver sur la Comète des points se rapprochant tangentiellement une de la courbe (k,r$_{min}$(k)) avec r$_{min}$(k)=0.66k/(Log(k))^2 correspondant aux naturels ayant 2 pour seul diviseur premier ou 2 et quelques autres diviseurs premiers grands. Or sur la comète de Goldbach, la courbe minimale observée présente une ordonnée nettement plus élevée que la courbe y(k)=0.66k/(Log(k))^2 (environ 15% en plus). On pourrait en conclure que le modèle MI(k)´(p$_1$,..p$_n$) nôest pas assez précis puisquôil conduit à obtenir la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood qui nôest pas illustrée par la Comète de Goldbach. Cependant, on peut interpréter cette différence de 15% dôune autre façon:

Comme on lôa vu dans lôEtude dôune fonction par la TAN 4A7a), on peut considérer que les tests illustrent partiellement la proposition P2$_{I(k)´(p1,é pn)}$ (r(k)), prenant E(X$_{I(k)´(p1,..,pn)}$ r(k))å C$_{I(k)´(p1,..,pn)}$ k/(Log(k))^2. Ainsi, on peut penser que les tests effectués ne déterminent pas r(k) pour k assez grand pour que soit illustrée la proposition P2$_{I(k)´(p1,é ,pn)}$ (r(k)) bien que celle-ci soit vraie.

Ainsi, on remarque que pour k dans [10000,90000], 1/Log(k) est de lôordre de 10%. De plus pour obtenir la variante de Hardy et Littlewood, on a obtenu un équivalent de E(X$_{I(k)´(p1,é ,pn)}$r(k)) en utilisant :

$$\sum_{i=500}^{k/2}\frac{1}{Log(k)Log(k-i)}\approx\frac{k/2}{(Log(k))^2}$$
Or pour obtenir cette équivalence, on utilise lôinégalité :
$$\sum_{i=500}^{k/2}\frac{1}{Log(k)Log(k-i)}\geq\frac{k/2-500}{(Log(k))^2}$$
Et donc il est possible quôun équivalent plus précis de E(X$_{I´(p1,é\ ,pn)}$r(k)) soit, utilisant une meilleure approximation du terme de gauche de lôinégalité précédente :

$$E(X_I r(k))\approx\frac{k}{(Log(k))^2}\times(1+\frac{\alpha}{Log(k)}+\frac{\beta}{(Log(k))^2}).$$

α et β étant 2 réels.
(On rappelle que pour obtenir p_{iA}=1/Log(i) on utilise que A est un ensemble estimé dôestimation a(n)=Ų$_{[2,n]}$ (1/Log(t))dt, qui est la meilleure estimation simple de P(n), nombre de nombres premiers inférieurs à n).
Il est clair que pour k tend vers lôinfini, 1/Log(k) tend vers 0, et donc on obtient bien une expression très proche de la variante de Conjecture de Hardy et Littlewood.
Dôaprès ce qui précède, on peut obtenir une meilleure estimation de E(X$_{I(k)´(p1,..,pn)}$ (r(k)) en remplaçant dans la proposition précédente P2$_{I(k)´(p1,é\ ,pn)}$ (r(k)) donnant un équivalent de E(X$_{I(k)´(p1,..,pn)}$ (r(k)) k/(Log(k))^2 par lôintégrale 2Ų$_{[3,k/2]}$ (1/(Log(x)Log(k-x))dx. (Ceci se justifie simplement si on a considéré que lôensemble A des nombres premiers avait une évaluation probabiliste p_{iA}=1/Log(i) pour i supérieur à N_A=3 au lieu de N_A=501)
Pour évaluer cette intégrale, on calcule la dérivée :
$$\frac{d}{dx}(\frac{x}{Log(x)Log(k-x)})$$
, et on intègre ensuite les 2 termes de lôégalité obtenue.

EXEMPLE 4.B.7

Etudions la Conjecture des nombres premiers jumeaux. Soit G lôensemble des nombres p premiers tels que (p,p+2) soit un couple de nombres premiers. A étant lôensemble des nombres premiers, on a pour tout naturel i, f_G(i)=f_A(i)f_A(i+2). On sait de plus que A est inclus dans I lôensemble des naturels impairs, mais plus précisément A est inclus dans K1 lôensemble des naturels dont le carré est congru à 1 modulo 24.

On définit donc les ensembles suivants, i représentant toujours un naturel:
A={i / i premier}
H={i /i+2 premier}
On a donc G=Až H.
K1 est lôensemble des naturels i tels que i^2 est congru à 1 modulo 24. On a donc :
K1={i / i^2 congru à 1 modulo 24}. K1 est donc lôensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de B_{K1}, avec :
B_{K1}={1,5,7,11,13,17,19,23}.
On a donc A inclus dans K1.
De même :
Kô1={i / $(i+2)^2$ congru à 1 modulo 24}. Kô1 est donc lôensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de $B_{Kô1}$, avec :
$B_{Kô1}$={3,5,9,11,15,17,21,23}
On définit alors K2 :
K2={i / i^2 et $(i+1)^2$ sont congrus à 1 modulo 24}. On a donc K2=K1ž Kô1. K2 est lôensemble des naturels congrus modulo 24 à un des éléments de B_{K2}, avec :
B_{K2}={5,11,17,23}.(Donc B_{K2}=B_{K1}ž $B_{Kô1}$).

Appliquant le pseudo-Axiome des ensembles estimés à A, comme dans lôexemple précédent, on obtient la modélisation :
Pour i supérieur à 501, f_A(i) est modélisée par la variable aléatoire Xf_A(i), avec p(« Xf_A(i)=1 »)=p_{iA} =1/Log(i)(1+Ů(i)).
Il en résulte :

Pour i supérieur à 501, $f_H(i)$ est modélisée par la variable aléatoire $Xf_H(i)$, avec p(« $Xf_H(i)=1$ »= p_{iH} =p_{i+2A}.
On sait que si i nôappartient pas à K2, $f_G(i)=0$ car G est inclus dans K2=K1ž Kô1.
Si i appartient à K2, par définition de $f_{A/C}$, A et C étant 2 sous-ensembles de **N**, on a:
$f_{G/K2}(i)=f_{Až\ K2/K2}(i)f_{Hž\ K2/K2}(i)$.

Utilisant le pseudo-Axiome de lôintersection des ensembles estimés appliqué à (A,K2,K1), puis le pseudo-Axiome de lôinclusion des ensembles estimés à (Až K2,K2), on obtient :
Pour i supérieur à 501, $f_{Až\ K2/K2}(i)$ est modélisée par $X_{Až\ K2/K2}(i)$, avec :
p(« $X_{Až\ K2/K2}(i)=1$ »)=$p_{iA}/p_{iK1}=3p_{iA}$.
De même, en procédant de la même façon pour H et Kô1 :
Pour i supérieur à 501, $f_{Hž\ K2/K2}(i)$ est modélisée par $X_{Hž\ K2/K2}(i)$, avec :
p(« $X_{Hž\ K2/K2}(i)=1$ »)=$p_{iH}/p_{iKô1}=3p_{i+2A}$.
Appliquant alors le pseudo-Axiome des variables indépendantes au couple ($X_{Až\ K2/K2}(i)$, $X_{Hž\ K2/K2}(i)$), on obtient que ces variables aléatoires peuvent être considérées comme définies sur le même espace et indépendantes, et appliquant la propriété de correspondance on obtient :
Pour i appartenant à K2, « $f_{G/K2}(i)=1$ » est modélisée par lôévènement « $Xf_{G/K2}(i)=1$ », de probabilité $p_{iG/K2}=9p_{iA}p_{i+2A}$.
(On aurait pu obtenir le même résultat en écrivant :
G=Gž K2=(Až K2)ž (Hž K2), puis en appliquant le pseudo-Axiome de lôintersection des ensembles estimés 2$^{\text{ième}}$ forme à (Až K2,Hž K2,K2), ce qui permet dôobtenir $p_{iG}=p_{iAž\ K2}p_{iHž\ K2}/p_{iK2}$ puis à (A,K2,K1), (H,K2,Kô1), ce qui permet dôobtenir $p_{iAž\ K2}=p_{iA}\ p_{iK2}/p_{iK1}$ et $p_{iHž\ K2}=p_{iH}\ p_{iK2}/p_{iKô1}$ puis le pseudo-Axiome de lôinclusion des ensembles estimés à (G,K2)), ce qui permet dôobtenir $p_{iG/K2}=p_{iG}/p_{iK2}$, et finalement $p_{iG/K2}=p_{iA}p_{iH}/(p_{iK1}p_{iKô1})$.

Il en résulte, écrivant $G(n)=\sum_{i=1}^{499} f_G(i)+\sum_{i=501,i\in K2}^{n} f_G(i)$ et utilisant une variante immédiate du Théorème 4.A.7, que la proposition:
P(Ŭ(3)) :« G est un ensemble estimé dôestimation :

$$g(n)=\sum_{i=501,i\in K2}^{n} 9p_{iA}p_{i+2A}\approx 9p_{iK2}\times\frac{k}{(Log(k))^2}=\alpha(3)\times\frac{k}{(Log(k))^2}$$, avec Ŭ(3)=3/2»

a une pseudo-preuve aléatoire. (On justifiera plus loin la notation P(Ŭ(3)).
Nous verrons quôil existe des modèles beaucoup plus précis que celui quôon a utilisé.
Or on a montré plus généralement (On est dans le cas 1 de lôEtude dôune fonction par la TAN 4A7a)) que la proposition:
Q(Ŭ(3)) : « Il existe б tel que G est un ensemble estimé dôestimation g(n), avec:

$$\frac{\lim}{n\to\infty}\left(\frac{g(n)}{\alpha(3)(n/(Log(n))^2}\right)=\beta$$ »

a une pseudo-preuve aléatoire. Si cette proposition est illustrée par des tests, elle a une explication aléatoire intéressante car elle nôa jamais été démontrée classiquement. Comme on lôa vu dans lôEtude théorique 4.A7a), plus proche est la valeur observée б de 1, valeur prédite par le modèle supposé exact, meilleur est la qualité du modèle et plus intéressante est lôexplication aléatoire. On remarque que Q(Ŭ(3)) entraîne la Conjecture faible des nombres premiers jumeaux (G est infini) tout en étant illustrée par des tests si elle est vraie, et donc si Q(Ŭ(3)) est illustrée par des tests (traçant $g(k)/(k/(Log(k))^2)$, la Conjecture faible des nombres premiers jumeaux a une pseudo-preuve aléatoire intéressante, et aussi une explication aléatoire puisquôelle nôa jamais été prouvée classiquement. On rappelle aussi quôon peut définir une proposition Q(Ŭ(3),B1) plus précise que Q(Ŭ(3), en bornant le distance $|\beta-1|$ par B1).

On peut généraliser et améliorer le modèle présenté ici en lôaméliorant en remarquant que K1 est lôensemble des naturels congrus à 1 ou 5 modulo 6, c'est-à-dire lôensemble I·(3) introduit dans lôExemple 4.B.6 précédent. Ceci justifie la notation P(Ŭ(3)), avec Ŭ(3)=3/2. Il est évident quôon peut obtenir une estimation de g(n) de façon analogue en remplaçant K1 par I·(p_1,é ,p_n) où p_1,..,p_n sont les n nombres premiers consécutifs

après 3. On obtient dans ce nouveau modèle une constante Ǔ(p_1,é ,p_n), telle que les propositions P(Ǔ(p_1,é ,p_n)) et P(Ǔ(p_1,é ,p_n),Ů) ont des pseudo-preuve aléatoires.
On rappelle que la Conjecture de Hardy et Litlewood concernant les nombres premiers jumeaux peut sœxprimer sous la forme P($2C_2$) :
P($2C_2$) : « G est un ensemble estimé dœstimation g(n)=$2C_2$n/(Log(n))^2 », C_2 étant la constante intervenant dans la Conjecture de Goldbach proposée par Hardy et Littlewood (voir Exemple 4.B6 précédent, C_2å0.66).
Il en résulte, si les tests illustrent la validité de cette Conjecture, que la modèle MI´(3) est de très bonne qualité considérant sa simplicité puisque 1.5 est très proche de 1 .32. (On remarque que ceci est encore plus manifeste si on écrit :

$$\frac{3}{2} = 2 \times (1 - \frac{1}{(3-1)^2}) \cong 2C_2$$

On peut donc conjecturer que la constante Ǔ(p_1,é ,p_n)=Ǔ$_n$ définie plus haut tend vers la limite $2C_2$ (pour n tend vers lœinfini). Si ceci est confirmé par des tests, ou est démontré utilisant la Théorie des Nombres classiques, il est clair que la Conjecture de Hardy et Littlewood pourra être approchée asymptotiquement par des propositions P(Ǔ$_n$) (C'est-à-dire Ǔ$_n$ tend vers $2C_2$) ayant une pseudo-preuve aléatoire. On pourra obtenir explicitement la Conjecture elle-même en utilisant le pseudo-Axiome suivant :

Pseudo-Axiome 4.B.7a)(de la limite) :
Si on obtient des propositions P(Ǔ) ayant des pseudo-preuves aléatoires, P(Ǔ) dépendant seulement du réel Ǔ, et tel que la suite Ǔ tende vers la limite Ǔ$_0$, alors lorsque *le pseudo-Axiome de la limite* est valide pour la suite (P(Ǔ)), alors P(Ǔ$_0$) est vrai.

Justification intuitive :
Ce pseudo-Axiome de la limite est évident intuitivement car dœaprès ses hypothèses on peut approcher dœaussi prés quœon veut P(Ǔ$_0$) par des propositions ayant une pseudo-preuve aléatoire.
On utilisera ce pseudo-Axiome de la limite quand les modèles Mi permettant dœobtenir les propositions P(Ǔ) sont de plus en plus précis.

En utilisant ce pseudo-Axiome de la limite, on voit que pour obtenir que la Conjecture des nombres premiers jumeaux a une pseudo-preuve aléatoire, il suffit de montrer classiquement que Ǔ(p_1,é ,p_n) tend vers $2C_2$ quand n tend vers lœinfini. Ceci se ramène à un problème classique de la Théorie des nombres concernant les ensembles **N**/p**N**.

Pour résoudre ce problème, on peut montrer que le modèle MI·(p_1,é ,p_n), obtenu en remplaçant K1 par I·(p_1,é ,p_n) conduit à obtenir Ǔ$_n$=Ǔ(p_1,é ,p_n) tendant ver $2C_2$ de la façon suivante :
On pose maintenant :
K1=I·(p_1,é ,p_n).
Kœ1={i dans **N** tel que i+2 appartient à K1}
K2=K1ž Kœ1
En procédant exactement comme dans lœExemple précédent avec K1=I·(3), on obtient que le modèle MI·(p_1,é ,p_n) conduit à obtenir que la proposition:

P(Ǔ$_n$) :« g(n)åǓ$_n$k/(Log(k))^2, avec : $\alpha_n = \frac{p_{iK2}}{(p_{iK1})^2} = \frac{1}{p_{iK1}} \times \frac{p_{iK2}}{p_{iK1}}$ »

a une pseudo-preuve aléatoire.
On a déjà obtenu p_{iK1} dans le Corollaire 4B6Bb).
Pour calculer p_{iK2}, on doit calculer le nombre dœéléments i de p(A(p_1,é ,p_n) (défini dans lœExemple précédent) tel que i+1 appartienne aussi à p(A(p_1,é ,p_n)), identifiant A(p_1,..,p_n) avec **N**/2p_1é p_n**N**.
Montrons alors le Théorème suivant :

THEOREME 4B7b) :
p_1,..,p_n étant n nombres premiers consécutifs après 2, le nombre dœéléments i de p(A(p_1,é ,p_n)) tel que i+2 appartient à p(A(p_1,é ,p_n)) est égal à (p_1-2)é (p_n-2).(Identifiant A(p1,é ,pn) avec **N**/2p_1,..,p_n**N**)
On notera j_1(p(A(p_1,..,p_n)))={i appartenant à p(A(p_1,..,p_n) tel que i+2 appartient à p(A(p_1,..,p_n))} et j_2(p(A(p_1,é ,p_n)}= {i appartenant à p(A(p_1,..,p_n)) tel que i-2 appartient à p(A(p_1,é ,p_n)).

Démonstration (par récurrence) :

Dans le cas où n=1, on est dans l'Exemple précédent, où on a vu :
$Card(j_1(p(A(3)))=Card(\{5\})=1=3-2$.
Donc le Théorème est vrai pour n=1.

Supposons qu'on ait montré le Théorème pour $p(A(p_1,..,p_{n-1}))$.
On pose $j_1(p(A(p_1,$é $,p_{n-1})))=\{h_{1,n-1},$é $,h_{s,n-1}\}$
L'ensemble des éléments i de $A(p_1,$é $,p_n)$ tels que ni i ni i+2 ne sont divisibles par $p_1,..,p_{n-1}$ est donc :
$B=\{h_{1,n-1},$é $,h_{s,n-1},$é $.,2p_1$é $p_{n-1}(p_n-1)+h_{1,n-1},..,2p_1$é $p_{n-1}(p_n-1)+h_{s,n-1}\}$
D'après l'hypothèse de récurrence :
$Card(B)=p_n(p_1-1)$é $(p_{n-1}-1)$.
$j_1(p(A(p_1,$é $,p_n)))$ est constitué des éléments i de B tels que ni i ni i+2 ne sont divisibles par p_n, c'est-à-dire les éléments i de B qui :

a) ne sont pas de la forme $i=ap_n$.(a dans $A(p_1,$é $,p_{n-1})$)
b) ne sont pas tels que $(i+2) = ap_n$.

Si on pose :
C={i appartenant à B tel que $i=ap_n$, a naturel}
D={i appartenant à B tel que $(i+2)=ap_n$}
On a donc : $j_1(p(A(p_1,$é $,p_n)))=B/(CUD)$.
De plus il est évident que C et D ont une intersection vide.
D'autre part C est l'ensemble des naturels i de $A(p_1,..,p_n)$ congrus à p_n modulo p_n, et tels que i n'est pas divisible par $p_1,$é $,p_{n-1}$ ni i+2.
Et on a vu dans le Lemme4B6Be) que l'ensemble des naturels congrus à p_n modulo p_n dans $A(p_1,$é $,p_n)$ contenait exactement un représentant de chaque élément de $\mathbf{N}/2p_1..p_{n-1}\mathbf{N}$ et était égal à l'ensemble de ces représentants. C correspond donc à l'ensemble des naturels ap_n dont le représentant appartient à $j_1(p(A(p_1,$é $,p_{n-1})))$.
On en déduit $Card(C)=Card(j_1(p(A(p_1,$é $,p_{n-1}))))=(p_1-2)..(p_{n-1}-2)$ d'après l'hypothèse de récurrence.
De même $Card(D)=Card(j_2(p(A(p_1,$é $,p_{n-1}))))=(p_1-2)..(p_{n-1}-2)$
On obtient bien :
$Card(j_1(p(A(p_1,..,p_n)))=Card(B)-Card(C)-Card(D)=(p_1-2)$é (p_n-2).

On déduit du Théorème précédent, pour K1=I·$(p_1,$é $,p_n)$:

$$p_{iK2} = \frac{(p_1-2)...(p_n-2)}{2p_1....p_n}$$

Et donc d'après le Corollaire 4B6Bb) donnant l'expression de p_{iK1} et celle donnée par la Remarque 4B6Bc) :

$$\alpha_n = \frac{p_{iK2}}{p_{iK1}} \times \frac{1}{p_{iK1}} = 2\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1}{(p_i-1)^2})$$

On obtient bien que Ŭ$_n$ tend vers $2C_2$ pour n tend vers l'infini.

On voit donc qu'il est très possible que la Conjecture des nombres premiers jumeaux (forte et faible) ne puisse pas être prouvée de façon classique, mais seulement en utilisant la TAN comme pour la Conjecture de Goldbach.

REMARQUE 4.B.7c) :

On peut obtenir des résultats très intéressants en utilisant la Pseudo-Axiome 4.B.7a) de la limite. En effet supposons qu'on ait montré que pour tout réel p tel que 0<p<1 la proposition suivante P2(p) (analogue à une des propositions de l'Etude d'une fonction par la TAN 4.A.7a))ait une explication aléatoire :
P2(p) : « Il existe 2 fonctions positives $\varepsilon_{1p}(k)$ et $\varepsilon_{2p}(k)$ définies sur **N*** et tendant vers 0 et il existe un naturel N_p tel que pour tout n supérieur à N_p, $I_p(k)$ étant l'intervalle $[1-\varepsilon_{1p}(k),1+\varepsilon_{2p}(k)]$:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times t(\frac{f(i)}{F(i)}\in I_p(i))\geq p$$

(La fonction F(i) étant définie sur **N***, et $F(i)\approx F_A(i)$, $F_A(i)$ étant une fonction connue) ».

On remarque que si P2(p) est vraie, si on redéfinit les intervalles $I_p(k)$ pour k inférieur à N_p, lœxpression précédente est vraie pour tout n, cœst à dire quœn peut prendre $N_p=1$.

Considérant alors une suite p_i tendant vers 1 et appliquant le pseudo-Axiome 4.B.7a) de la limite à la suite de propositions $(P2(p_i))_{\mathbf{N}^*}$, on obtient que la proposition P2(1) est vraie. Or on obtient immédiatement que la proposition P2(1) est équivalente à :

« Il existe 2 fonctions positives $\varepsilon_1(k)$ et $\varepsilon_2(k)$ définies sur **N*** et tendant vers 0 telle que pour tout i dans N*, définissant $I(k)=[1-\varepsilon_1(k),1+\varepsilon_2(k)]$:

$$\frac{f(i)}{F(i)}\in I(i)$$

Il est donc immédiat quœn obtient la proposition suivante P1 a une pseudo-preuve aléatoire:

$$P1 : \lim_{i\to\infty}\left(\frac{f(i)}{F(i)}\right)=1$$

Appliquant ce qui précède à la proposition P2(S(n)) de la Remarque 4.A.7b), remarquant quœn aurait pu dans cette proposition remplacer 0.98 par nœimporte quel réel p avec $0<p<1$, on obtient que la proposition suivante, cœst à dire P1(S(n)) a une pseudo-preuve aléatoire:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S(n)}{\sum_{i=NA}^{n} p_{iA}}\right)=1$$

On obtient donc alors le Théorème 4.A.7) sans utiliser la Loi Forte des Grands Nombres généralisée.
De même, on remarque que dans la proposition $P2_{MI}(r(k))$ (Etude de la fonction r(k) par le modèle simple indépendant MI), on aurait pu remplacer 0.98 par nœimporte quel réel p tel que $0<p<1$. Dœaprès ce qui précède, on obtient donc que la proposition suivante $P2_{MIlim}(r(k))$ a une pseudo-preuve-aléatoire :

$P2_{MIlim}(r(k))$: « $\lim_{i\to\infty}\left(\frac{r(i)}{(i/(Log(i))^2}\right)=1$ »

Appliquant le même raisonnement à la proposition $P2_{I(k)\pi(p1,é\ ,pn)}$ r(k)) (Etude de la fonction r(k) par le modèle indépendant $MI(k)\pi(p_1,é\ ,p_n)$) (On rappelle $p_1,é\ ,p_n$ sont les n premiers nombres premiers différents de 2), on obtient, i appartenant à lœnsemble $F(t_1,é\ ..,t_r)$ contenant les naturels pairs ayant pour autres diviseurs premiers que 2 $t_1,..,t_r$, que la proposition suivante a une pseudo-preuve aléatoire:
$P_{MI(k)\pi(p1,..,pn)\lim}(r(k))$: «

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{r(i)}{C_{I(k)\pi(p1,..,pn)}(t_1,..,t_r)(i/(Log(i))^2)}\right)=1$$ ».

Or on a vu :

$$\lim_{n\to\infty}(C_{I(k)\pi(p1,...,pn)}(t_1,...t_r))=C_2\prod_{j=1}^{r}\left(\frac{t_j-1}{t_j-2}\right)$$

On obtient donc, appliquant à nouveau le pseudo-Axiome 4.B7b) de la limite aux propositions $P_{MI(k)\pi(p1,..,pn)}$ pour n tend vers lœinfini, que la proposition suivante $P_{H.L.G}$ a une pseudo-preuve aléatoire :

$P_{H.L.G}$: ñ $r(i)\approx C_2\prod_{j=1}^{r}\frac{t_j-1}{t_j-2}\times\frac{i}{(Log(i)^2)}$ ò

5.CONCLUSION

Ainsi on a montré comment la TAN permettait de montrer que des propositions concernant les décimales dœirrationnels ou des sous-ensembles de **N** avaient des explications aléatoires, c'est-à-dire des explications rationnelles basées sur le hasard, sans avoir été démontrées classiquement ni leur négation.
Il semble certain que bien que souvent ces explications aléatoires soient très simples, ces propositions nœaient pas de démonstration classique. Par exemple si on considère la proposition « Si I est lœnsemble des naturels i inférieurs à n tels que la $i^{ème}$ décimale de Log(3),ã5,´ coïncide, alors I est infini », il semble impossible de prouver cette proposition en utilisant les Axiomes classiques de la Théorie des nombres, alors que cette proposition peut être obtenue très simplement par la TAN, qui permet dœobtenir aussi lœstimation i(n) de I.

Comme dans lôétude de la Conjecture faible de Goldbach [5], on a vu que la TAN permettait non seulement de prévoir que certains ensembles étaient finis, infinis ,vides ou non vides, mais aussi de prévoir certaines de leurs caractéristiques, par exemple leur estimation. Il semble impossible dôobtenir ces caractéristiques si particulières sans utiliser les modèles statistiques obtenus par la TAN.

Il reste à réaliser des tests, afin de vérifier lôimportance et la validité de la TAN concernant les décimales dôirrationnels et les ensembles estimés. En particulier, il faudrait vérifier en effectuant des tests la validité de la variante de la Conjecture forte de Goldbach de Hardy et Littlewood, et celle concernant les nombres premiers jumeaux dont on a donné une pseudo-preuve aléatoire dans cet article. Si tel nôétait pas le cas, il faudrait trouver des modèles plus précis que ceux présentés dans cet article.
Il reste aussi à démontrer la Loi Forte des Grands Nombres généralisée quôon a conjecturée, mais ceci est un problème classique de probabilité. Il faudrait aussi comme on lôa vu étudier les prédictions des modèles MI(k)´(p_1,é ,p_n), et M_{eq}I(k)´(p_1,..,p_n) pour les faibles valeurs de k (k dans [1000,100000]) et vérifier si elles permettent de justifier lôaspect de la Comète de Goldbach pour ces faibles valeurs.

Un résultat extrêmement intéressant obtenu dans cet article est dôavoir donné une explication aléatoire à des propositions comme la variante de la Conjecture de Hardy et Littlewood concernant la Conjecture forte de Goldbach et la Conjecture forte des nombres premiers jumeaux.

Références :

1.E.J Borowski, J.M Borwein,Mathematics,*Collins Dictionnary* (GB 1984)
2.J.P Delahaye, *Merveilleux nombres premiers,* Belin (Paris 2000)
3.M.R Spiegel,J.S Schiller,R.Srinivasan,*Probability and statistics*,McGraw Hill (2000)
4.P.Roger,*Probabilités statistiques et processus stochastiques*,Pearson(France 2004)
5.T.Delort, *Théorie Aléatoire des Nombres-Partie I :Conjecture faible de Goldbach.* , Extrait du livre Théories dôor, Editions Books on Demand, Paris (2010)
6.O.Rioul, *Théorie des probabilités,* Lavoisier (2008),Paris.
7.Hardy and Littlewood, *On the expression of a number as a sum of primes,* Acta mathematica,(1923).

NOTES 1

NOTES 2

NOTES 3